

TD 16 : CORRIGES.

Exercice 2 : Réflexion

On peut calculer l'expression de la projection orthogonale p_P sur P , puis la symétrie cherchée s_P vérifie : $s_P = 2p_P - id$.

On trouve : $s_P : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{3}(2x + 2y - z, 2x - y + 2z, -x + 2y + 2z)$ et on en déduit la matrice dans la base canonique de s_P .

Exercice 17 : Endomorphisme symétrique de trace nulle

1. D'après le théorème spectral, comme u est symétrique, il existe une base orthonormée de E $(e_1, \dots, e_n)$ formée de vecteurs propres de u . On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. Le

vecteur $x = \sum_{i=1}^n e_i$ convient car :

$$\langle u(x), x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n e_i, \sum_{k=1}^n e_k \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

en utilisant le caractère orthonormal de la famille $(e_1, \dots, e_n)$.

De plus $x \neq 0_E$ par liberté de $(e_1, \dots, e_n)$.

2. On raisonne par récurrence sur n . Si $n = 1$, l'hypothèse $\text{tr } u = 0$ signifie que $u = 0$, donc la conclusion est claire. On suppose que la propriété est établie pour tout espace euclidien de dimension $n - 1$. Soient E un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{S}(E)$ de trace nulle. D'après la question précédente, il existe $x \in E$ non nul tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$. Le vecteur unitaire $e_1 = \frac{x}{\|x\|}$ vérifie aussi $\langle u(e_1), e_1 \rangle = 0$. On sait qu'on peut compléter e_1 pour former une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ orthonormale de E . La matrice de u sur $\mathcal{B}$, symétrique puisque $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{B}$ est orthonormale, prend alors la forme suivante :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & & & \\ \vdots & & T & \\ a_n & & & \end{pmatrix}, \quad \text{où } T \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Comme $\text{tr } u = \text{tr } S = \text{tr } T$, la trace de T est nulle et l'hypothèse de récurrence (on passe des endomorphismes aux matrices) montre l'existence de $P \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $T' = P^{-1}TP = {}^t PTP$ soit de diagonale nulle. Alors la matrice $Q = \text{diag}(1, P)$ est orthogonale d'ordre n , et vérifie

$$S' = Q^{-1}SQ = {}^t QSQ = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & & & \\ \vdots & & P^{-1}TP & \\ a_n & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & & & \\ \vdots & & T' & \\ a_n & & & \end{pmatrix}.$$

Si $\mathcal{C}$ désigne la base de E telle que Q soit la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}$ est orthonormale puisque $Q \in O_n(\mathbb{R})$, donc S' est la matrice de u sur une base orthonormale, et sa diagonale est nulle

Exercice 16 : Déterminant de Gram

1. $\Rightarrow$ Il existe une relation de dépendance linéaire entre les (U_i) qui, par linéarité du produit scalaire par rapport à la 2^e variable, se retrouve sur les colonnes de la matrice, son déterminant est donc nul.
- $\Leftarrow$ Il existe une relation de dépendance linéaire entre les colonnes de la matrice $\sum \lambda_i C_i = 0$ donc, par linéarité du produit scalaire par rapport à la 2^e variable : $\forall i, \langle U_i, \sum \lambda_j U_j \rangle = 0$, et en effectuant la cl de coefficients les λ_i de ces relations, on obtient par linéarité du produit scalaire par rapport à la 1^{re}, $\langle \sum \lambda_j U_j, \sum \lambda_j U_j \rangle = 0$ et donc (U_i) est liée.
2. On décompose $x = x_1 + x_2$ où x_1 est le projeté orthogonal de x sur F et $x_2 \in F^\perp$ et en développant par linéarité par rapport à la dernière colonne, puis par linéarité par rapport à la dernière ligne, on obtient :

$$\det G(U_1, \dots, U_p, x) = \begin{vmatrix} G(U_1, \dots, U_p) & \begin{matrix} \langle U_1, x_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle U_p, x_1 \rangle \end{matrix} \\ \langle x, U_1 \rangle \quad \dots \quad \langle x, U_p \rangle & \langle x, x_1 \rangle \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G(U_1, \dots, U_p) & \begin{matrix} \langle U_1, x_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle U_p, x_2 \rangle \end{matrix} \\ \langle x, U_1 \rangle \quad \dots \quad \langle x, U_p \rangle & \langle x, x_2 \rangle \end{vmatrix}.$$

La dernière colonne de la 2^e matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \|x_2\|^2 \end{pmatrix},$$

donc son déterminant vaut $\|x_2\|^2 \det G(U_1, \dots, U_p)$. On développe ensuite le 1^{er} déterminant par rapport à sa dernière ligne et comme $x_2 \in F^\perp$, il vaut $\det G(U_1, \dots, U_p, x_1) = 0$ car $(U_1, \dots, U_p, x_1)$ est liée. On en déduit que

$$d^2(x, F) = \|x_2\|^2 = \frac{\det G(U_1, \dots, U_p, x)}{\det G(U_1, \dots, U_p)}.$$

Exercice 20

1) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

A est diagonalisable d'après le Th spectral:

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, P \in O_n(\mathbb{R}), A = P \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot P^{-1}$

Ponons $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| + 1 > 0$.

$$Sp(A + \lambda I_n) = \{ \lambda + \lambda_i, i \in [1, n] \}, A + \lambda I_n \in S_n(\mathbb{R})$$

ou $\forall i \in [1, n], |\lambda + \lambda_i| \geq \lambda - |\lambda_i| > 0$

dc $Sp(A + \lambda I_n) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Finalement $A + \lambda I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

2) ϕ est un endomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$.

Ma ϕ est surjective, alors ϕ sera bijective.

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}, A + \lambda I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

$\phi(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

$$+q \quad A + \lambda I_n = \phi(S) \in \text{Im } \phi$$

$I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset \text{Im } \phi : \exists T \in S_n^{++}(\mathbb{R}), I_n = \phi(T)$

$$\text{donc } A = A + \lambda I_n - \lambda I_n = \phi(S) - \lambda \phi(T) = \phi(S - \lambda T)$$

$\in \text{Im } \phi$

ϕ est donc surjective.

3) Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, A_p = A + \frac{1}{p} I_n \in S_n(\mathbb{R})$$

$$\text{et } Sp(A_p) = \left\{ \lambda + \frac{1}{p}, \lambda \in Sp A \right\} \subset \mathbb{R}^{+*}$$

car $Sp A \subset \mathbb{R}^+$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{p} > 0$.

donc $A_p \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

$$\text{De plus } \|A - A_p\|_\infty = \left\| \frac{-1}{p} I_n \right\|_\infty = \frac{1}{p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{donc } A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$$

$$\text{Finalement, } \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = S_n^+(\mathbb{R})$$

donc $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est dense dans $S_n^+(\mathbb{R})$.