

TD 17 : Calcul différentiel.

Fondamentaux de base : EX 1 à 9, EX 12, 13, 15, 18, .

Grands classiques d'approfondissement et/ou méthodes à retenir : EX 10, EX 11, EX 14, EX 16

Exercice 1 :

Etudier la continuité et l'existence et la continuité des dérivées partielles pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$
2. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$
3. $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$
4. $f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$

Exercice 2 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0, \quad f(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer en quels points de $\mathbb{R}^2$ les dérivées partielles de f existent. En quels points sont-elles continues ?

Exercice 3 : Soit f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par : $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

1. Montrer que f se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. La fonction $\tilde{f}$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4 : Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. (a) Quel est le domaine de définition de f ?
(b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
(a) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et les calculer.
(b) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ et les calculer.
(c) f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5 : Soient f et h les fonctions définies par $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y+1}\right)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et $h(x) = \arctan(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et qu'elle est solution du problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, & \Delta f(x, y) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, & f(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

Exercice 6 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

On pose $g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(e^t \sin(t), 1 + t^2) \end{cases}$ et $h: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t^3, \cos(t)) \end{cases}$

Montrer que g et h sont de classe C^1 et calculer leurs dérivées.

Exercice 7 : Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Démontrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer ses dérivées partielles d'ordre 1 lorsque $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

1. $F(x, y) = f(-x + 3y, 5xy)$ 2. $F(x, y) = f(y, y)$ 4. $F(x, y) = xyf(xy, y^2)$.

Exercice 8 : Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et g définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $g : (u, v) \mapsto (f(uv, u^2 + v^2))$. Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre deux.

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

1. Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 10 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2, g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

1. Calculer $\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.
2. On pose $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ le laplacien de f . Exprimer Δf en fonction des dérivées de g .

Exercice 11 : (théorème d'Euler)

Soit C un cône ouvert de sommet 0 dans $\mathbb{R}^p$ (c.a.d. un ouvert de $\mathbb{R}^p$ tel que : $\forall x \in C, \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, tx \in C$).

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, une application f de C dans $\mathbb{R}$ est dite homogène de degré α sur C si :

$$\forall x \in C, \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(tx) = t^\alpha f(x).$$

Soit $f \in C^1(C, \mathbb{R})$.

1. Montrer que si f est homogène de degré α alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $\alpha - 1$.

2. Montrer que f est homogène de degré $\alpha \Leftrightarrow \forall x \in C, \sum_{i=1}^p x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x)$.

Exercice 12 : Etudier les éventuels extrema des fonctions définies par pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ 2. $f(x, y) = x^3 + y^3$ 3. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$
4. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$ 5. $f(x, y) = x^2 + y^2 + \sin(x^2 + y^2)$ (sur $[-1, 1]^2$)

Exercice 13 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Déterminer les points critiques de f .
2. Calculer la matrice hessienne de f en ces points. En déduire les extremums éventuels de f .

Exercice 14 : Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(x) \rightarrow_{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$. Montrer que f possède sur $\mathbb{R}^n$ un minimum global.

Exercice 15 : On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

1. Soit une fonction f solution. On pose $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, g(u, v) = f(u + v, u - v)$. Calculer les dérivées partielles de g par rapport à u et à v .
2. Déterminer la fonction g . En déduire les fonctions f vérifiant l'équation.

Exercice 16 : Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante sur le domaine $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$:

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(on utilisera les coordonnées polaires)

Exercice 17 : 1. Montrer que $\varphi : (x, y) \mapsto (y - \frac{x^2}{2}, y)$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sur un ouvert U à préciser. Déterminer φ^{-1} et justifier qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. En posant $(u, v) = \varphi(x, y)$, résoudre $\frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Exercice 18 : E3A PC 2025

Soient $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto 2t^3 - t^2 + 1$ et $f : M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 + y^2$.

1. Etudier les variations de φ sur $[-1, 1]$ et en donner la représentation graphique.
2. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire que f n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^2$.
4. Soit D le disque fermé de centre O et de rayon 2 : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$.
 - (a) Justifier que f admet sur D des extrema globaux.
 - (b) Justifier que ces extrema sont atteints sur le cercle de centre O et de rayon 2.
 - (c) Soit $M = (x, y)$ un point du cercle de centre O et de rayon 2 : il existe donc $\alpha \in]-\pi, \pi]$ tel que $x = 2 \cos(\alpha)$ et $y = 2 \sin(\alpha)$. Montrer que $f(M) = 4\varphi(\cos(\alpha))$.
 - (d) En déduire les extrema globaux de f sur D .