DM 12 : à rendre le vendredi 20 mars 2026

PROBLEME 1

Dans tout le problème, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

1. Justifier que l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente
2. Montrer que l'application $(.|.) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}dt.$$

4. Conclure que $(X^k|1) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Ecrire la matrice de α dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.
7. En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k | k \in [\![0, n]\!]\}$.

II.Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

8. Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?
9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
10. Justifier que P_k est de degré k.
11. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

12. Montrer que $(\alpha(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$.
13. En déduire que $(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))$.
14. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser les questions 9 et 13.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes que l'on note $x_1, \dots, x_n$. On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

15. Montrer qu'un n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

16. En déduire qu'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$.
17. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

PROBLEME 2 : Facultatif

Si $\mathbb{K}$ désigne un coprs, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on adopte les notations suivantes.

- On munit $M_p(\mathbb{K})$ de la norme quadratique $\|.\|_2$ définie par

$$\forall A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p} \in M_p(\mathbb{K}),\ \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}|a_{i,j}|^2} = \sqrt{Tr(\overline{A}^T A)}$$

  et on munit $M_p(\mathbb{K})$ de la structure d'espace vectoriel normé associé.
- Si $A \in M_p(\mathbb{K})$, on note u_A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ canoniquement associé à la matrice A et, par abus de notation, $\ker(A) = \ker(u_A)$.
- Si $A \in M_p(\mathbb{K})$ on définit, lorsque cette limite existe,

$$E(A) = \lim_{n\to+\infty}\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n$$

- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne cononique d'espace euclidien.

1 Question préliminaire.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

A. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le module et un argument de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ en fonction de a, b et n.

B. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

2 Matrices antisymétriques réelles d'ordre 2 ou 3.

A. **Matrices antisymétriques d'ordre 2.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

A.1 Déterminer un nombre $\beta_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$\frac{1}{\beta_n}\left(I_2 + \frac{1}{n}A\right) \in SO_2(\mathbb{R})$$

A.2 Déterminer un nombre réel θ_n tel que

$$\frac{1}{\beta_n}\left(I_2 + \frac{1}{n}A\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}$$

A.3 En déduire que $E(A)$ existe et que c'est une matrice de rotation, dont on précisera l'angle.

B. **Matrices antisymétriques d'ordre 3.**

B.1 Soit $B \in M_3(\mathbb{R})$ antisymétrique.

a) Montrer que $\det(B) = 0$.

b) Montrer que $(\ker(u_B))^\perp$ est stable par u_B.

c) En déduire que B est de rang 0 ou 2.

B.2 Montrer qu'il existe une matrice P de $O_3(\mathbb{R})$ et un réel β tels que

$$B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

B.3 Montrer que lorsque l'égalité de la question précédente est vérifiée, on a $|\beta| = \frac{\|B\|_2}{\sqrt{2}}$.

B.4 Montrer que $E(B)$ existe et est une matrice de rotation. Préciser la valeur de son angle non orienté en fonction de $\|B\|_2$.

3 Exponentielle de matrices diagonalisables.

A. **Cas de matrices diagonales.**
Soit $D \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonale.

A.1 Montrer que $E(D)$ existe et que $E(D) \in GL_p(\mathbb{K})$.

A.2 Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(D) = E(D)$.

A.3 Soit Δ l'ensemble des matrices diagonales de $M_p(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\forall (A, B) \in \Delta, E(A + B =)E(A)E(B)$$

B. **Existence et propriétés de $E(A)$ lorsque A est diagonalisable.**
Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.

B.1 Montrer que $E(A)$ existe.

B.2 Montrer que $\det(E(A)) = e^{Tr(A)}$.

B.3 Soit $x \in \mathbb{K}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que

$$E(xI_p + A) = e^x E(A)$$

C. **Exponentielle de la somme.**
Soient $A, B \in M_p(\mathbb{K})$ deux matrices diagonalisables. On suppose que A et B commutent.

C.1 Montrer qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales. *On étudiera les endomorphismes induits par u_B aux sous-espaces propres de u_A.*

C.2 En déduire que $E(A + B)$ existe et que $E(A + B) = E(A)E(B) = E(B)E(A)$.