

**DM 12 : CORRIGE****PROBLEME 1 : CCINP PC 2019****Partie I - Produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$** **I.1 - Généralités**

- $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$  est continue sur  $[0, 1]$ , donc intégrable sur  $[0, 1]$ .
  - $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$  est continue sur  $[1, +\infty[$ .

$P(t)Q(t)e^{-t} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$  par croissances comparées.

Or  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  (Riemann et  $2 > 1$ ), donc, par comparaison,  $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

$t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$  est donc intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , donc, en particulier, l'intégrale définissant  $(P|Q)$  est convergente
- L'application  $(\cdot|\cdot)$  est bien définie à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
  - Pour tout  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ ,

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t} dt = (Q|P),$$

donc  $(\cdot|\cdot)$  est symétrique.

- Pour tout  $(P, Q, R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} (\lambda P + Q|R) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P(t) + Q(t))R(t)e^{-t} dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t} dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale convergente}) \\ &= \lambda(P|R) + (Q|R), \end{aligned}$$

donc  $(\cdot|\cdot)$  est linéaire à gauche.

- $(\cdot|\cdot)$  est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.
- Pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $P^2(t)e^{-t} \geq 0$ .

D'où, par positivité de l'intégrale (qui converge et " $+\infty > 0$ "), on a :

$$(P|P) = \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t} dt \geq 0.$$

$(\cdot|\cdot)$  est donc positif.

- Enfin, pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , si  $(P|P) = 0$ , alors  $\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t} dt = 0$ .

Or  $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$  est continue et positive sur  $\mathbb{R}_+$ , " $0 < +\infty$ " et  $\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t} dt$  converge, donc pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $P^2(t)e^{-t} = 0$ , et donc  $P^2(t) = 0$ , puis  $P(t) = 0$ .

Le polynôme  $P$  a donc une infinité de racines (tous les éléments de  $\mathbb{R}_+$ ), donc  $P = 0$ .

$(\cdot|\cdot)$  est donc bien défini.

- $(\cdot|\cdot)$  définit donc bien un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

## I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. Posons  $u(t) = t^k$ ,  $u'(t) = kt^{k-1}$ ,  $v'(t) = e^{-t}$ ,  $v(t) = -e^{-t}$ .

$u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$ .

$u(t)v(t) = -t^k e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  par croissances comparées.

Enfin, les deux intégrales  $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt$  et  $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$  sont convergentes.

On peut donc intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt &= [-t^k e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} kt^{k-1} e^{-t} dt \\ &= 0 + k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt. \end{aligned}$$

4. Montrons par récurrence que, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $(X^k|1) = k!$  ( $HR_k$ )

**Initialisation :** Pour  $k = 0$ ,  $(X^0|1) = (1|1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$  (cours), donc on a bien  $HR_0$ .

**Hérédité :** Soit  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et supposons  $HR_k$  vérifiée.

Alors, d'après la question précédente, comme  $k+1 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$(X^{k+1}|1) = \int_0^{+\infty} t^{k+1} e^{-t} dt = (k+1) \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = (k+1)(X^k|1) \stackrel{HR_k}{=} (k+1)k! = (k+1)!.$$

On a bien  $HR_{k+1}$ .

**Conclusion :** D'où, par récurrence, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $(X^k|1) = k!$ .

## Partie II - Construction d'une base orthogonale

### II.1 - Propriétés de l'application $\alpha$

5. • Pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $\alpha(P) = XP'' + (1-X)P'$  est un polynôme.

De plus, comme  $\deg(P') \leq \deg(P) - 1 \leq n-1$  et  $\deg(P'') \leq n-2$ , on a

$$\deg(\alpha(P)) \leq \max(\deg(XP''), \deg((1-X)P')) \leq \max(1+n-2, 1+n-1) \leq n,$$

donc  $\alpha(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ . On a donc  $\alpha : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ .

• De plus, pour tout  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda P + Q) &= X(\lambda P + Q)'' + (1-X)(\lambda P + Q)' \\ &= X(\lambda P'' + Q'') + (1-X)(\lambda P' + Q') \quad (\text{par linéarité de la dérivation}) \\ &= \lambda XP'' + XQ'' + \lambda(1-X)P' + (1-X)Q' = \lambda(XP'' + (1-X)P') + (XQ'' + (1-X)Q') \\ &= \lambda\alpha(P) + \alpha(Q), \end{aligned}$$

donc  $\alpha$  est une application linéaire.

•  $\alpha$  est donc bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

6. On a  $\alpha(1) = X(1)'' + (1-X)(1)' = 0$ ,  $\alpha(X) = X(X)'' + (1-X)(X)' = 1 - X$  et, pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,

$$\alpha(X^k) = X(X^k)'' + (1-X)(X^k)' = Xk(k-1)X^{k-2} + (1-X)kX^{k-1} = -kX^k + k^2X^{k-1}.$$

*Rq : On remarque que cette formule est encore valable pour  $k = 1$ , donc on a,*

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha(X^k) = -kX^k + k^2X^{k-1} \quad \text{et} \quad \alpha(1) = 0.}$$

On a donc

$$Mat_{(1,X,\dots,X^n)}(\alpha) = Mat_{(1,\dots,X^n)}(\alpha(1), \dots, \alpha(X^n)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -(n-1) & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}.$$

7. Comme  $Mat_{(1,X,\dots,X^n)}(\alpha)$  est triangulaire supérieure, son spectre se lit sur la diagonale. On a donc

$$\text{Sp}(\alpha) = \text{Sp} (Mat_{(1,X,\dots,X^n)}(\alpha)) = \{-k | k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

## II. Vecteurs propres de l'application $\alpha$

On fixe un entier  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

8. Comme  $\alpha$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  ayant  $n + 1$  valeurs propres, toutes ces valeurs propres sont simples.

$-k$  est donc valeur propre simple de  $\alpha$ , donc  $\dim E_{-k}(\alpha) = \dim(\text{Ker}(\alpha + k\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})) = 1$ .

9. • Soit  $(Q_k)$  une base de  $\text{Ker}(\alpha + k\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$  avec  $Q_k \neq 0$ .

Notons  $a$  le coefficient dominant de  $Q_k$  (non nul car  $Q_k \neq 0$ ).

Alors  $P_k = \frac{1}{a}Q_k$  est un polynôme ayant un coefficient dominant égal à 1.

De plus,  $P_k = \frac{1}{a}Q_k \in \text{Vect}(Q_k) = \text{Ker}(\alpha + k\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ , donc

$$(\alpha + k\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})(P_k) = 0 \Leftrightarrow \alpha(P_k) + kP_k = 0 \Leftrightarrow \alpha(P_k) = -kP_k.$$

Il existe donc bien un polynôme  $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$ , de coefficient dominant égal à 1, vérifiant  $\alpha(P_k) = -kP_k$ .

• Supposons qu'il existe un autre polynôme  $R_k \in \mathbb{R}_n[X]$ , de coefficient dominant égal à 1, vérifiant  $\alpha(R_k) = -kR_k$ .

Alors  $R_k \in \text{Ker}(\alpha + k\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \text{Vect}(Q_k) = \text{Vect}(\frac{1}{a}Q_k) = \text{Vect}(P_k)$ , donc il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $R_k = \lambda P_k$ .

De plus, les deux polynômes  $P_k$  et  $R_k$  ont le même coefficient dominant (1), donc  $\lambda = 1$ , et, par suite,  $R_k = P_k$ . On a donc bien l'unicité.

• Il existe donc bien un unique polynôme  $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$ , de coefficient dominant égal à 1, vérifiant  $\alpha(P_k) = -kP_k$ .

10. Soit  $d$  le degré de  $P_k$ , avec  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$  car  $P_k$  est non nul et  $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$ .

Il existe donc  $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$  tels que  $P_k = \sum_{i=0}^d a_i X^i$  (et  $a_d = 1$ ).

Alors on a :

$$\begin{aligned} \alpha(P_k) &= \sum_{i=0}^d a_i \alpha(X^i) \quad (\text{par linéarité de } \alpha) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^d a_i (-iX^i + i^2 X^{i-1}) \quad (\text{d'après la question 6}) \\ &= \sum_{i=1}^d -i a_i X^i + \sum_{i=0}^d a_i i^2 X^{i-1}. \end{aligned}$$

Comme on a par ailleurs  $\alpha(P_k) = -kP_k$  (car  $P_k \in \text{Ker}(\alpha + k\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ ), on obtient, en identifiant les coefficients dominants :

$$-da_d = -ka_d \underset{a_d=1}{\Leftrightarrow} -d = -k \Leftrightarrow d = k,$$

donc  $P_k$  est de degré  $k$ .

11. • On a  $\alpha(1) = 0 = -0(1)$  et le coefficient dominant de 1 est 1, donc, par unicité de  $P_0$ , on a  $P_0 = 1$ .
- On a  $\alpha(X) = -X + 1$ , donc  $\alpha(X - 1) = \alpha(X) - \alpha(1) = -X + 1 + 0 = -(X - 1)$ , et le coefficient dominant de  $X - 1$  est 1, donc, par unicité de  $P_1$ , on a  $P_1 = X - 1$ .
- Le coefficient dominant de  $X^2 - 4X + 2$  est 1 et

$$\alpha(X^2 - 4X + 2) = \alpha(X^2) - 4\alpha(X) + 2\alpha(1) = -2X^2 + 4X - 4(-X + 1) + 0 = -2X^2 + 8X - 4 = -2(X^2 - 4X + 2),$$

donc, par unicité de  $P_2$ , on a  $P_2 = X^2 - 4X + 2$ .

### II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

Soit  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ .

12. • Par linéarité de l'intégrale convergente,

$$(\alpha(P)|Q) = \int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} (tP''(t) + P'(t))Q(t)e^{-t} dt - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t} dt,$$

où toutes ces intégrales convergent d'après la question 1.

• Posons  $u'(t) = tP''(t) + P'(t)$ ,  $u(t) = tP'(t)$ ,  $v(t) = Q(t)e^{-t}$ ,  $v'(t) = Q'(t)e^{-t} - Q(t)e^{-t}$ .  
 $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

$u(t)v(t) = tP'(t)Q(t)e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$  par croissances comparées.

Enfin, toutes les intégrales convergent (toujours d'après la question 1).

On peut donc intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (tP''(t) + P'(t))Q(t)e^{-t} dt &= [tP'(t)Q(t)e^{-t}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tP'(t)(Q'(t)e^{-t} - Q(t)e^{-t}) dt \\ &= 0 - 0 - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t} dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (\alpha(P)|Q) &= \int_0^{+\infty} (tP''(t) + P'(t))Q(t)e^{-t} dt - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t} dt \\ &= - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt. \end{aligned}$$

13. Par symétrie des rôles de  $P$  et  $Q$ , on a aussi

$$(\alpha(Q)|P) = - \int_0^{+\infty} tQ'(t)P'(t)e^{-t} dt = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt,$$

donc, par symétrie du produit scalaire,

$$(\alpha(P)|Q) = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt = (\alpha(Q)|P) = (P|\alpha(Q)).$$

14. • Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ ,

$$\begin{aligned} (\alpha(P_i)|P_j) &= (-iP_i|P_j) = -i(P_i|P_j) \\ \text{et } (\alpha(P_i)|P_j) &= (P_i|\alpha(P_j)) = (P_i| -jP_j) = -j(P_i|P_j), \end{aligned}$$

donc, d'après la question 13,  $-i(P_i|P_j) = -j(P_i|P_j)$ , donc  $(i - j)(P_i|P_j) = 0$ , donc, si  $i \neq j$ , on a  $(P_i|P_j) = 0$ .

La famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est donc orthogonale.

• De plus, elle est composée de vecteurs non nuls (car le coefficient dominant de ces polynômes vaut 1), donc cette famille est libre.

Comme elle est libre et composée de  $n + 1$  polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$ , espace vectoriel de dimension  $n + 1$ , c'est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

• La famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est donc bien une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

### Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

15. Remarquons déjà que, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = (1|X^k) = k!$  d'après la question 4.

$\Rightarrow$  Si un  $n$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  vérifie  $(*)$ , alors pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , en posant  $P(X) = X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ , on doit avoir

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k, \quad \text{ie } k! = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k.$$

Le  $n$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  vérifie donc bien :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

$\Leftarrow$  Réciproquement, si  $n$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  vérifie

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix},$$

alors pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la ligne  $k$  de ce système donne  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k = k! = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ .  
D'où, pour tout polynôme  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^n \lambda_i a_k x_i^k = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k t^k e^{-t} dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= \int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt. \end{aligned}$$

On a donc bien  $(*)$ .

16. La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$  est une matrice de Van der Monde, donc inversible car les  $x_i$  sont deux à deux distincts.

Le système  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$  est donc de Cramer, donc il

admet un unique  $n$ -uplet solution. D'où l'unicité de  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  vérifiant  $(*)$ .

17. • Soit  $P = P_n^2$ . Alors  $\deg(P) = 2 \deg(P_n) = 2n$ , donc  $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ .

• De plus,  $t \mapsto P(t)e^{-t} = P_n^2(t)e^{-t}$  est continue, positive et non nulle sur  $\mathbb{R}_+^*$  (car  $P_n$ , non nul, n'a pas une infinité de racines), donc, par stricte positivité de l'intégrale (" $0 < +\infty$ "),  $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt > 0$ .

• Enfin, comme  $x_i$  est racine de  $P_n$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_i$  est aussi racine de  $P = P_n^2$ , donc  $\sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i) = \sum_{i=1}^n 0 = 0$ , donc on a bien

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \neq 0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i).$$

## 1 Question préliminaire.

- A. Soit  $z' = 1 + \frac{z}{n}$ ; on a  $|z'|^2 = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2}$  et on distingue plusieurs cas.
- Si  $(a, b) = (-n, 0)$  alors  $(1 + z/n)^n = 0$  est de module nul mais on ne définit pas son argument (ou, alternativement, son argument est quelconque).
  - Si  $a = -n$  et  $b > 0$  alors  $(1 + \frac{z}{n})^n = \left(\frac{b}{n}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{2}}$ . Comme  $\left(\frac{b}{n}\right)^n > 0$ , c'est la forme géométrique (avec le module et l'argument).
  - Si  $a = -n$  et  $b < 0$  on écrit de même  $(1 + \frac{z}{n})^n = \left(\frac{-b}{n}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{2}}$ . Comme  $\left(\frac{-b}{n}\right)^n > 0$ , c'est la forme géométrique (avec le module et l'argument).
  - Sinon, on a  $z' = |z'|e^{i\theta_n}$  avec  $\tan(\theta_n) = \frac{b}{n+a}$  et  $(1 + \frac{z}{n})^n = |z'|^n e^{in\theta_n}$ . Pour expliciter  $\theta_n$ , on doit encore distinguer deux cas selon le signe de la partie réelle de  $z'$ .
    - Si  $a > -n$  alors  $\theta_n = \arctan\left(\frac{b}{n+a}\right)$ .
    - Si  $a < -n$  alors  $\theta_n = \pi + \arctan\left(\frac{b}{n+a}\right)$ .

- B.  $a, b$  étant fixé, pour  $n$  assez grand on a  $a > -n$ . Ainsi, en posant  $r_n = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2}}$  et  $\theta_n = \arctan\left(\frac{b}{n+a}\right)$  on a

$$\exists n_0 / \forall n \geq n_0, \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n e^{in\theta_n}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} r_n^n &= \left(1 + \frac{2a}{n} + O(1/n^2)\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{2a}{n} + O(1/n^2)\right)\right) \\ &= \exp(a + O(1/n)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \exp(a) \end{aligned}$$

$$n\theta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{bn}{a+n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} b$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^a e^{ib} = e^z$$

## 2 Matrices antisymétriques réelles d'ordre 2 ou 3.

- A.1 On pose  $\beta_n = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}$ .  $\beta_n$  est élément de  $\mathbb{R}^{+*}$ . De plus  $\frac{1}{\beta_n} \left(I_2 + \frac{A}{n}\right)$  a ses deux colonnes normées et orthogonales et est donc dans  $O_2(\mathbb{R})$ . Comme son déterminant vaut 1, c'est même un élément de  $SO_2(\mathbb{R})$  :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}} \left(I_2 + \frac{1}{n}A\right) \in SO_2(\mathbb{R})$$

- A.2 Comme  $(1/\beta_n, \frac{\alpha}{n\beta_n})$  est sur le cercle unité, il existe un unique  $\theta_n \in ]-\pi, \pi]$  tel que

$$\cos(\theta_n) = \frac{1}{\beta_n} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_n) = \frac{\alpha}{n\beta_n}$$

et on a alors

$$\frac{1}{\beta_n} \left(I_2 + \frac{1}{n}A\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}$$

Comme  $\frac{1}{\beta_n} > 0$ , on peut affirmer (comme en question 1.A) que

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{\alpha}{n}\right)$$

A.3 On a alors (la composée de  $n$  rotations d'angle  $\theta$  étant la rotation d'angle  $n\theta$ )

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(I_2 + \frac{A}{n}\right)^n = \beta_n^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}$$

Or,  $\beta_n^n = \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2} \ln(1 + O(1/n^2))\right) = \exp(O(1/n)) \rightarrow 1$  et  $n\theta_n \sim n \frac{\alpha}{n} \rightarrow \alpha$ .

Ainsi

$$E(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_2 + \frac{A}{n}\right)^n = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

C'est la matrice de rotation d'angle  $\alpha$ .

B.1  $B$  est une matrice antisymétrique d'ordre 3.

a) On a  $\det(B) = \det(B^T) = \det(-B) = (-1)^3 \det(B) = -\det(B)$  et donc

$$\det(B) = 0$$

b) Soit  $x \in \text{Ker}(u_B)^\perp$ . On a

$$\forall y \in \text{Ker}(u_B), (u_B(x)|y) = (Bx)^T y = x^T B^T y = -x^T (By) = 0$$

et  $u_B(x)$  est donc dans  $\text{Ker}(u_B)^\perp$ . On a montré que

$$u_B(\text{Ker}(u_B)^\perp) \subset \text{Ker}(u_B)^\perp$$

c)  $B$  n'étant pas inversible, elle est de rang  $\leq 2$ . Supposons, par l'absurde, qu'elle soit de rang 1; par théorème du rang,  $\text{Ker}(u_B)$  est alors de dimension 2 et son orthogonal est donc de dimension 1. Notons  $(e)$  une base  $\text{Ker}(u_B)^\perp$ . La stabilité prouvée ci-dessus indique qu'il existe un scalaire  $\lambda$  tel que  $u_B(e) = \lambda e$ . Calculons alors  $e^T B e = \lambda \|e\|^2$ ; cette quantité qui est réelle est égale à sa transposée et

$$\lambda \|e\|^2 = (e^T B e)^T = e^T B^T e = -e^T B e = -\lambda \|e\|^2$$

Comme  $\|e\| \neq 0$ , on obtient que  $\lambda = 0$  et donc  $e \in \text{Ker}(u_B)$ .  $e$  doit être dans le noyau et son orthogonal et est non nul : c'est une contradiction.

Finalement

$$\text{rg}(B) \in \{0, 2\}$$

B.2 Si  $B = 0$  alors le résultat demandé est immédiat avec  $\beta = 0$  et  $P = I_3$ . Sinon,  $B$  est de rang 2 et son noyau est de dimension 1. Notons  $e_1$  un vecteur normé de ce noyau et complétons en une b.o.n.  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ .  $(e_2, e_3)$  est une base de  $\text{Ker}(u_B)^\perp$  et cet espace est stable par  $u_B$ . On en déduit que dans  $\mathcal{B}$ ,  $u_B$  est représentée par une matrice du type  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$  où  $B' \in M_2(\mathbb{R})$ . En notant  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathcal{B}$ , on a

$$P^{-1} B P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$$

Comme  $P$  est orthogonale (matrice de passage entre b.o.n.),  $P^{-1} = P^T$  et l'antisymétrie de  $B$  entraîne celle de  $B'$  qui est donc du type  $\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ . On a ainsi (dans tous les cas)

$$\exists P \in O_3(\mathbb{R}), \exists \beta \in \mathbb{R} / B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

B.3 Comme  $Tr(UV) = Tr(VU)$ , on a alors  $Tr(PMP^{-1}) = Tr(P^{-1}PM) = Tr(M)$  et

$$\|B\|_2^2 = -Tr(B^2) = -Tr\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}\right)^2\right) = -Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^2 \end{pmatrix}\right) = 2\beta^2$$

ou encore

$$|\beta| = \frac{\|B\|_2}{\sqrt{2}}$$

B.4 On a tout d'abord

$$I_3 + \frac{1}{n}B = P\left(I_3 + \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}\right)P^{-1}$$

Comme  $(PMP^{-1})^k = PM^kP^{-1}$  (par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$ ) on en déduit que

$$\left(I_3 + \frac{1}{n}B\right)^n = P\left(I_3 + \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}\right)^n P^{-1}$$

Un calcul par blocs montre (toujours par récurrence sur  $k$ ) que

$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}), \forall a \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & M^k \end{pmatrix}$$

En notant  $A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ , on en déduit que

$$\left(I_3 + \frac{1}{n}B\right)^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (I_2 + \frac{1}{n}A)^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

La question 2.A donne  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (I_2 + \frac{1}{n}A)^n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\beta \end{pmatrix}$  avec  $R_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$ . Enfin,  $M \in M_3(\mathbb{R}) \mapsto PMP^{-1}$  est linéaire et donc continue (on est en dimension finie) et ainsi

$$E(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_3 + \frac{1}{n}B\right)^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}P^{-1}$$

$E(B)$  est donc la matrice dans une bonne base (la base  $\mathcal{B}$  mentionnée plus haut) de la rotation axiale d'axe dirigé par  $e_1$  et d'angle  $|\beta|$  (tant que l'axe n'est pas orienté, l'angle ne l'est pas non plus et est défini au signe près). Cet angle non orienté est donc égal à  $\frac{\|B\|_2}{\sqrt{2}}$ .

### 3 Exponentielle de matrices diagonalisables.

A.1 Notons  $d_1, \dots, d_p$  les coefficients diagonaux de  $D$ . On a  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_p)$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(I_p + \frac{1}{n}D\right) = \text{diag}\left(1 + \frac{d_1}{n}, \dots, 1 + \frac{d_p}{n}\right)^n = \text{diag}\left(\left(1 + \frac{d_1}{n}\right)^n, \dots, \left(1 + \frac{d_p}{n}\right)^n\right)$$

La question préliminaire indique que  $\left(1 + \frac{d_k}{n}\right)^n \rightarrow e^{d_k}$  et ainsi

$$E(D) = \text{diag}(e^{d_1}, \dots, e^{d_p})$$

$E(D)$  est diagonale à coefficients diagonaux non nuls et est donc inversible :

$$E(D) \in GL_p(\mathbb{K})$$

A.2 Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  les valeurs propres de  $D$  deux à deux distinctes (chaque  $d_i$  est un  $\lambda_j$ ). D'après le théorème d'interpolation de Lagrange, il existe un (unique)  $Q \in \mathbb{K}[X]$  de degré  $\leq k-1$  tel que  $\forall j, Q(\lambda_j) = e^{d_j}$ . On a alors  $\forall j, Q(d_j) = e^{d_j}$  et

$$Q(D) = \text{diag}(Q(d_1), \dots, Q(d_p)) = E(D)$$

A.3 Tout d'abord,  $E$  envoie bien les éléments de  $\Delta$  dans  $GL_p(\mathbb{K})$ . De plus, si  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_p)$  et  $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_p)$  sont dans  $\Delta$ , on a

$$\begin{aligned} E(A+B) &= E(\text{diag}(a_1+b_1, \dots, a_p+b_p)) \\ &= \text{diag}(e^{a_1+b_1}, \dots, e^{a_p+b_p}) \\ &= \text{diag}(e^{a_1}e^{b_1}, \dots, e^{a_p}e^{b_p}) \\ &= \text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_p})\text{diag}(e^{b_1}, \dots, e^{b_p}) \\ &= E(A)E(B) \end{aligned}$$

$E$  est donc bien un morphisme de groupes de  $(\Delta, +)$  dans  $(GL_p(\mathbb{K}), \times)$ .

B.1 Par hypothèse, il existe une matrice inversible  $P \in GL_p(\mathbb{K})$  et une matrice  $D \in \Delta$  telles que  $P^{-1}AP = D$ . On a alors  $I_p + \frac{1}{n}A = P(I_p + \frac{1}{n}D)P^{-1}$ . Comme  $(PMP^{-1})^k = PM^kP^{-1}$  (récurrence sur  $k$ ) on en déduit que

$$\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n = P\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n P^{-1}$$

On vient de voir que  $(I_p + \frac{1}{n}D)^n \rightarrow E(D)$  et on sait que  $M \rightarrow PMP^{-1}$  est continue. On en déduit que  $E(A)$  existe et que

$$E(A) = PE(D)P^{-1}$$

B.2 Le déterminant étant un invariant de similitude, on a  $\det(E(A)) = \det(E(D))$ . En notant  $d_1, \dots, d_p$  les coefficients diagonaux de  $D$ , on a

$$\det(E(D)) = \prod_{k=1}^p e^{d_k} = e^{\sum_{k=1}^p d_k} = e^{\text{Tr}(D)}$$

Enfin, la trace étant un invariant de similitude,  $D$  et  $A$  ont même trace et finalement

$$\det(E(A)) = e^{\text{Tr}(A)}$$

B.3 On a encore  $xI_p + A = P(xI_p + D)P^{-1}$  et donc, par le même calcul ( $xI_p + D$  étant diagonale)

$$E(xI_p + A) = PE(xI_p + D)P^{-1}$$

Avec le morphisme évoqué en 3.A.3, on a aussi  $E(xI_p + D) = E(xI_p)E(D)$  et, avec 3.A.1,  $E(xI_p) = e^x I_p$ . Ainsi

$$E(xI_p + A) = P(e^x I_p E(D))P^{-1} = e^x PE(D)P^{-1} = e^x E(A)$$

C.1 Comme  $u_A$  et  $u_B$  commutent, tout sous-espace propre pour  $u_A$  est stable par  $u_B$  (c'est un résultat du cours). Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  les valeurs propres de  $A$  deux à deux distinctes et  $E_1, \dots, E_k$  les sous-espaces propres associés.  $E_j$  étant stable par  $u_B$ ,  $u_B$  induit un endomorphisme  $v_j$  sur  $E_j$ . Or, la restriction à un sous-espace stable d'un diagonalisable est diagonalisable (autre résultat du cours) et  $v_j$  est donc diagonalisable. Il existe une base  $\mathcal{B}_j$  de  $E_j$  formée de vecteurs propres pour  $v_j$  et donc pour  $u_B$ . De plus, les éléments de  $\mathcal{B}_j$  sont dans  $E_j$  et sont donc aussi des vecteurs propres pour  $u_A$ .

Comme  $A$  est diagonalisable, les  $E_j$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{K}^p$  et la concaténation  $\mathcal{B}$  des  $E_j$  est une base de  $\mathbb{K}^p$ . On a vu qu'elle est formée de vecteurs propres pour  $u_A$  ET  $u_B$ . Dans cette base,  $u_A$  et  $u_B$  sont représentés par des matrices diagonales.

Matriciellement, ceci signifie que si  $P$  est la matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathcal{B}$  alors  $P^{-1}AP$  et  $P^{-1}BP$  sont diagonales

C.2 On a alors  $P^{-1}(A+B)P$  qui est diagonale et  $E(A+B)$  existe. De plus, en notant  $D_A = P^{-1}AP$  et  $D_B = P^{-1}BP$ , on a  $P^{-1}(A+B)P = D_A + D_B$  et

$$E(A+B) = P^{-1}E(D_A + D_B)P$$

Toujours avec le morphisme de 3.A.3, on conclut que

$$E(A+B) = P^{-1}E(D_A)E(D_B)P = P^{-1}E(D_A)PP^{-1}E(D_B)P = E(A)E(B)$$

Enfin, comme  $D_A + D_B = D_B + D_A$ , on peut reprendre ceci pour obtenir

$$E(A+B) = P^{-1}E(D_B)E(D_A)P = E(B)E(A)$$