Préparation aux oraux : Algèbre

Complexes, polynômes

Exercice 1 : CCINP Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X-1)^{2n+1} - 1$. Déterminer les racines de P puis calculer $\prod_{k=0}^{2n} \cos(\frac{k\pi}{2n+1})$.

Exercice 2 : CCINP Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = (X-a)^n(X-b)^n$ et $Q_n = \frac{P_n^{(n)}}{n!}$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de Q_n.
2. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P_n^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(b) = 0$ puis que $Q_n(a) \neq 0$ et $Q_n(b) \neq 0$.
3. Donner une expression de Q_n. En déduire que : $\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)^2 = \left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array} \right)$

Exercice 3 : CCINP sans préparation

1. Déterminer les solutions de $z^n = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
2. Résoudre : $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1$.

Exercice 4 : IMT Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $P = (X+i)^n - (X-i)^n$. Trouver les racines de P dans $\mathbb{C}$ puis calculer $\prod_{k=1}^{n-1}(4 + \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{n})$.

Exercice 5 : Centrale Résoudre $(z^2+1)^n - (z+i)^{2n} = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6 : Centrale Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$ si et seulement si il existe $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$.

Exercice 7 : MP 2022
Soit $(U_n)_n$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que $U_0 = 1$, $U_1 = 2X$ et pour tout $n \geq 2$: $U_n(X) = 2XU_{n-1}(X) - U_{n-2}(X)$

1. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\deg(U_n)$ et son coefficient dominant.
2. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta)U_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1)\theta)$.
3. Montrer que U_n possède n racines distinctes et décomposer U_n en produit de facteurs irréductibles.

Exercice 8 : X - Centrale - CCINP
Soit E l'ensemble des polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ tels que : $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

1. Soit a une racine de P. Montrer que a^2 est racine de P.
2. Montrer que les racines de P sont soit nulles, soit de module 1.
3. Montrer que P n'admet pas de racines réelles.
4. Déterminer E.

Algèbre linéaire

Exercice 9 : MT 2025

Soit $u \in L(E)$ nilpotent avec E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

1. u est-il diagonalisable ?
2. Montrer qu'il existe une base B de E telle que $M_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
3. On suppose $a = 0$ ou $c = 0$. Montrer qu'il existe une base C de E telle que $M_C(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. On suppose a et $c \neq 0$. Montrer qu'il existe une base F de E telle que $M_F(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 : CCINP 2025

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 5A + 6I_n = 0$.

1. Montrer que A est diagonalisable et que Sp(A)=$\{2, 3\}$. On note D la matrice diagonale associée.
2. On définit pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $f(M) = DM + MD$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme.
   (b) Montrer que f est diagonalisable. (on pourra écrire D et M par blocs).

Exercice 11 : CCINP 2025 sans préparation

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $A^3 + 4A^2 + 5A = 0$ (1).

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Quelle relation établir entre le polynôme annulateur de A et ses valeurs propres ?
3. En déduire l'ensemble des matrices symétriques réelles vérifiant (1).

Exercice 12 : CCINP 2022

Soit $A \in E = M_n(\mathbb{R})$ non nulle et $f : E \to E \; X \mapsto X - 2tr(X)A$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. (a) On suppose tr$A$=$\frac{1}{2}$. Montrer que $A \in$Ker$f$.
   (b) On suppose tr$A \neq \frac{1}{2}$. Montrer que Ker$f = \{0\}$.
   (c) En déduire que f est bijective ssi tr$A \neq \frac{1}{2}$.
3. On suppose tr$A$=$\frac{1}{2}$. Déterminer Ker$f$.

Exercice 13 : CCINP 2023

Soit Φ l'application qui à $P \in \mathbb{R}_3[X]$ le reste de la division euclidienne de X^2P par $X^4 - 1$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Justifier que Φ est diagonalisable, déterminer ses éléments propres.
3. Soit A la matrice de Φ dans la base canonique de Φ. A est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}. Φ est-il un automorphisme ?

Exercice 14 : CCINP 2023

Soient $(A,B) \in M_n(\mathbb{C})^2$ telles que $AB = BA$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.

1. Montrer que si U et V sont deux matrices semblables, alors pour tout polynôme R, $R(U)$ et $R(V)$ sont semblables.
2. Soit P un polynôme. Déterminer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, B et $P'(A)$.
3. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $B = 0_n$.

Exercice 15 : CCINP Soit pour $m \in \mathbb{N}$, $A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$

1. Donner les valeurs propres et sous-espaces propres de A_m.
2. Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles A_m est diagonalisable. Même question pour que A_m soit inversible.

Exercice 16 : ENSEA - sans préparation

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Retrouver cette expression en observant que $A = I_3 + N$ où N est une matrice nilpotente.

Exercice 17 : CCINP

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Les matrices A et B sont-elles nilpotentes ? Diagonalisables ?
3. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle. Montrer que M est nilpotente si et seulement si M est semblable à N.
4. L'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
5. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 18 : CCINP 2022

Soit $u \in L(E)$ où $E = \mathbb{R}^n$ tel que $u^2 - u + id_E = 0$.

1. Montrer que u n'admet pas de valeurs propres.
2. Dans cette question $n = 2$.
   (a) Soit $x \neq 0_E$ et $y \in E$. Montrer que (x,y) est liée ssi $\exists \alpha \in \mathbb{R}, y = \alpha x$.
   (b) En déduire que $(x, u(x))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ puis déterminer la matrice de u dans la base $(x, u(x))$.
3. Montrer que le degré de χ_u est pair.
4. On note $n = 2p$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base B de E dans laquelle la matrice de u est : $\begin{pmatrix} A & & & & \\ & A & & & \\ & & A & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A \end{pmatrix}$.

5. Résoudre $u^2 - u + id_E = 0$.

<u>Exercice</u> 19 : IMT 2025
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + 9A = 0$ avec $n \geq 3$.

1. A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$?
2. A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$?
3. On suppose n impair. Justifier que A n'est pas inversible.

<u>Exercice</u> 20 : IMT 2025
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ non nulles et $f : M \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto M + Tr(AM)B$.

1. Trouver un polynôme annulateur de f.
2. Trouver les racines de ce polynôme.
3. Etudier les valeurs propres de f. f diagonalisable ?

<u>Exercice</u> 21 : IMT 2022
Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et $f \in L(E)$ tel que $f^2 - f - 2id = 0$.

1. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} puis montrer que $E =$Ker$(f - 2id_E)\oplus$Ker$(f + id_E)$.
2. Déterminer f^n.

<u>Exercice</u> 22 : CCINP Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 3$. On suppose que $\mathrm{rg}(A) = 2$, $\mathrm{Tr}(A) = 0$, et $A^n \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable.

<u>Exercice</u> 23 : ENSAM Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et M la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à a et tous les autres égaux à b. Diagonaliser M et calculer son déterminant.

<u>Exercice</u> 24 : IMT
Soient f et $g \in L(E)$ telles que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

1. Montrer que Ker$g$ et Imf sont supplémentaires dans E.
2. Justifier que Imf=f(Img).

<u>Exercice</u> 25 : IMT
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose A inversible. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. On suppose A non inversible. Montrer que $A - \dfrac{1}{p}I_n$ est inversible pour $p \in \mathbb{N}^*$ assez grand. En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

<u>Exercice</u> 26 : X Soit $\Phi \in L(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telle que $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $\Phi(AB) = \Phi(BA)$ et $\Phi(I_n) = n$. Montrer que $\Phi = Tr$.

<u>Exercice</u> 27 : Centrale Soit $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in M_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $a_{k,k} = e^{\frac{i(2k+1)\pi}{n}}$. Calculer A^n.

<u>Exercice</u> 28 : Centrale 2025 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$.

1. On pose seulement dans cette question $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2. \end{pmatrix}$; B est-elle diagonalisable ?
2. Exprimer χ_B en fonction de χ_A.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ et $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in M_{2n,1}(\mathbb{C})$. Montrer que si Z est vecteur propre de B alors X est vecteur propre de A.
4. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

Exercice 29 : Centrale Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ possédant $p \geq 2$ valeurs propres distinctes (*) $\lambda_1, ..., \lambda_p$ telles que pour tout $i \in [\![2, p]\!]$ $|\lambda_i| < |\lambda_1|$. On note pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $tr(A^k) \neq 0$, $t_k = \dfrac{tr(A^{k+1})}{tr(A^k)}$.

1. Montrer que t_k est défini à partir d'un certain rang k_0, que la suite $(t_k)_{k \geq k_0}$ converge et déterminer sa limite.
2. Justifier que si l'hypothèse $(*)$ n'est pas vérifiée, le résultat du 1. peut être mis en défaut.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et déterminer la limite de $\dfrac{A^k}{k}$ lorsque $k \to +\infty$.

Exercice 30 : MP 2025
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

1. Montrer que $\chi_A(B) \in Gl_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $X \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $AX = XB \Leftrightarrow X = 0$.
3. Montrer que pour tout $M \in M_n(\mathbb{C}), \exists! X \in M_n(\mathbb{C}), AX - XB = M$.

Exercice 31 : MP Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ puis résoudre l'équation $M^3 + 2M = A$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 32 : MP Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\Psi : M \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{tr}(A)M + \mathrm{tr}(M)A$.

1. L'endomorphisme Ψ est-il diagonalisable ?
2. Donner le polynôme caractéristique et la trace de Ψ.

Exercice 33 : MP Soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = B$.

1. Montrer que B n'est pas inversible.
2. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $AB^k - B^k A$. En déduire que B est nilpotente.

Exercice 34 : X ENS
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$ diagonalisable. Montrer que $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$.

Exercice 35 : MP Soient E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension finie non nulle, f et g dans $\mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.
2. On suppose que $f \circ g = g \circ f + f$. Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

Exercice 36 : X ENS 2025
1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ tq $\exists U \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, $A = UU^T$. CNS pour que A soit diagonalisable.
2. Soit $f \in L(E)$ tq $\exists P \in \mathbb{R}[X]$, $P(0) = 0$, $P'(0) \neq 0$, et $P(f) = 0$. Montrer que $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f = E$.

Algèbre euclidienne

Exercice 37 : CCINP sans préparation
Soit E un espace euclidien et $f \in O(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - id_E) \perp \mathrm{Im}(f - id_E)$.

Exercice 38 : IMT 2025
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de rang 1 ($n \geq 2$).

1. CNS pour que A soit diagonalisable ?
2. Exprimer le polynôme caractéristique avec la trace de A.
3. Soit $J \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1, $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(\Omega)=1$. Déterminer le rang de $\Omega^{-1}J$.
4. Montrer que $\det(\Omega + J) \leq n + 1$, cas d'égalité ?

Exercice 39 : IMT Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 40 : ENSEA
Trouver les $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - M^2 + M - I_n = 0$.

Exercice 41 : ENSAM
Soient E un espace vectoriel euclidien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Déterminer $tr(f)$ en fonction des e_i et des $f(e_i)$.
2. On suppose f et g autoadjoints, f et g positifs (au sens où toutes leurs valeurs propres sont $\geqslant 0$). Montrer que $tr(f \circ g) \geqslant 0$.

Exercice 42 : CCINP 2023 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Montrer que f est une rotation vectorielle si et seulement si a, b et c régissent 3 équations à expliciter.
2. On suppose $b = c \neq 0$. Donner l'axe et une mesure de l'angle de la rotation f.

Exercice 43 : MT 2023 Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $M^T = M^2$ et $\det(\mathrm{M}) \neq 0$.

1. Montrer que $M^4 = M$ puis justifier que f est bijective et déterminer $\det(\mathrm{M})$.
2. Montrer que $M \in So_2(\mathbb{R})$ puis déterminer f.

Exercice 44 : CCINP

1. Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Calculer $\langle X^i, X^j\rangle$.
2. Soit $f \colon (u_1, \ldots, u_n) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - \sum_{k=1}^{n} u_k t^k\right)^2 e^{-t}dt$. Montrer que f possède un unique minimum global sur $\mathbb{R}^n$ et le déterminer.

Exercice 45 : CCINP 2022
$E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique $< .,. >$ et de la norme usuelle notée $||.||$. On note $B = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, $a_{ij} = i + j$.
On note f l'endomorphisme de E canoniquement associé à A.
On pose $u = (1, 1, .., 1)$ et $v = (1, 2, ..., n)$.

1. Montrer que (u, v) est libre.
2. (a) Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ exprimer $f(e_j)$ en fonction de u, v, et j. En déduire que :

$$\forall x \in E, f(x) = < u, x > v + < v, x > u$$

(b) Montrer que Ker(f)=Vect$(u,v)^{\perp}$ et déterminer Im(f).

3. Soit λ une valeur propre non nulle de f et x un vecteur propre associé. Montrer que $x \in$Im(f).
4. On pose pour tout $x \in E$, $\psi(x) =< x, f(x) >$. Montrer que ψ n'est pas bornée.
5. On pose pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $\phi(x) = \dfrac{\psi(x)}{||x||^2}$. Montrer que Φ admet un maximum sur E et le déterminer.

Exercice 46 : IMT

Soit E un espace euclidien, r et p deux projections orthogonales de E et λ une valeur propre non nulle de $p \circ r$ associée au vecteur propre u.

1. Montrer que $u \in$Imp et que $r(u) - \lambda u \in$ Ker$p$.
2. Montrer que $\lambda ||u||^2 = ||r(u)||^2$.
3. Montrer que $\lambda \in [0,1]^2$.

Exercice 47 : IMT

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$ et p la projection orthogonale sur H.

1. Déterminer le projeté orthogonal de $u \in \mathbb{R}^3$ sur l'orthogonal de H.
2. En déduire le projeté orthogonal de u sur H puis la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la symétrie orthogonale par rapport à H.

Exercice 48 : Centrale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose pour tout $(P,Q) \in E^2$: $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 t^2 P(t) Q(t) dt$ et pour tout $P \in E$: $u(P) = X(1-X)P'' + (3-4X)P'$.

1. Montrer que $\langle , \rangle$ définit un produit scalaire sur E et que u est un endomorphisme de E.
2. Montrer que u est symétrique.
3. Déterminer les valeurs propre de u.

Exercice 49 : MP 2025

On considère $M_n(\mathbb{R})$ muni de sa structure canonique. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : M \mapsto AM - MA$.

1. Montrer que φ est autoadjoint.
2. Exprimer les éléments propres de φ en fonction de ceux de A.
3. Supposons A nilpotente. Montrer que φ est nilpotent.

Exercice 50 : MP

Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. On pose pour tout $x \in E$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x) e_i$.

1. Montrer que f est un endomorphisma auto-adjoint défini positif.
2. Montrer qu'il existe g un automorphisme auto-adjoint positif tel que $g^2 = f^{-1}$. Est-il unique ?
3. Soit g un tel automorphisme. Montrer que $(g(e_1), ..., g(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice 51 : X

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $N_A = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / AM = MA^T\}$.

1. Montrer que dim$N_A \geq n$.

2. Donner un exemple de matrice A telle que $\dim N_A = n$ (*).

<u>Exercice</u> 52 : X

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det(A) \geqslant 0$.
2. Si $p \in \{1, \dots, n-1\}$, soit $A_p = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$. Montrer que $\det(A_p) \geqslant 0$.