

Préparation aux oraux : Algèbre - CORRIGES

Complexes, polynômes

Exercice 1 : CCINP

Si z est racine complexe de P alors $(z-1)^{2n+1} = 1$ donc $z-1 = \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$. Posons $z_k = 1 + \omega_k = 1 + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$ où $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$. Ces valeurs étant 2 à 2 distinctes on a $2n+1$ racines simples de P , donc on les a toutes.

Le produit $\prod_{k=0}^{2n} z_k$ des racines de P est égal à $(-1)^{\deg P} P(0) = 2$, donc

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{2n} z_k &= \prod_{k=0}^{2n} \left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\right) = \prod_{k=0}^{2n} e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} 2 \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = 2^{2n+1} e^{\sum_{k=0}^{2n} \frac{ik\pi}{2n+1}} \prod_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \\ &= 2^{2n+1} e^{\frac{in(2n+1)\pi}{2n+1}} \prod_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = 2^{2n+1} (-1)^n \prod_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = 2. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\prod_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}.$$

Exercice 2 : CCINP

- Comme P_n est de degré $2n$ et de coefficient dominant 1, alors Q_n est de degré n et de coefficient dominant

$$\frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{n!} = \frac{(2n)}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}.$$

- Comme a et b sont distincts, ce sont deux racines de P_n d'ordre exactement n , ce qui équivaut aux relations $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $P_n^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(b) = 0$ et $P_n^{(n)}(a) \neq 0$ et $P_n^{(n)}(b) \neq 0$. Comme Q_n est proportionnel à $P_n^{(n)}$ avec un coefficient $\frac{1}{n!}$ non nul, on en déduit que $Q_n(a) \neq 0$ et que $Q_n(b) \neq 0$.
- La formule de Leibniz de dérivation d'un produit montre que

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(X-a)^n]^{(k)} [(X-b)^n]^{(n-k)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n(n-1)\cdots(n-k+1)(X-a)^{n-k} n(n-1)\cdots(k+1)(X-b)^k \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n!)^2}{k!(n-k)!} (X-a)^{n-k} (X-b)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-a)^{n-k} (X-b)^k \end{aligned}$$

En comparant les coefficients dominants, on en déduit la relation $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 3 : CCINP sans préparation

- On a : $z^n = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z = e^{i\frac{2k\pi + \pi}{n}}$.

2. On a : $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1 \Leftrightarrow Y = \frac{z+1}{z-1}$ et $Y^n + \frac{1}{Y^n} = 1 \Leftrightarrow Y = \frac{z+1}{z-1}$ et $Y^{2n} - Y^n + 1 = 0$.

Or l'équation du second degré : $Z^2 - Z + 1 = 0$ admet deux solutions : $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc $Y^{2n} - Y^n + 1 = 0 \Leftrightarrow Y^n = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, Y = e^{i\frac{2k\pi \pm \pi}{n}}$.

Enfin, pour $Y \neq 1$, $Y = \frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow z = \frac{1+Y}{Y-1}$.

Finalement, on obtient $2n$ solutions (en appliquant les formules d'Euler) :

$$\left\{-i \cotan\left(\frac{k\pi}{n} \pm \frac{\pi}{6n}\right); k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\right\}$$

Exercice 4 :

1. On constate que $P(i) = (2i)^n \neq 0$, donc que, pour résoudre l'équation $P(z) = 0$, on peut poser $y = \frac{z+i}{z-i}$, de sorte que y soit un nombre complexe différent de 1. Alors $P(z) = 0 \Leftrightarrow y^n = 1$, dont les solutions en y sont les $\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$ avec $1 \leq k \leq n-1$: il est impossible que $k = 0$ puisque $y \neq 1$. Comme $z = i\frac{y+1}{y-1}$, les solutions de $P(z) = 0$ sont les

$$z_k = i \frac{e^{2ik\pi/n} + 1}{e^{2ik\pi/n} - 1} = i \frac{e^{ik\pi/n} + e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}} = i \frac{2 \cos(k\pi/n)}{2i \sin(k\pi/n)} = \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n-1.$$

On trouve bien $n-1$ racines complexes, ce qui est cohérent puisque P est de degré $n-1$, et non pas n .

2. On pose $v_k = z_k + 2i = \cotan\frac{k\pi}{n} + 2i$. Alors $|v_k|^2 = v_k \overline{v_k} = 4 + \cotan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, de sorte que le produit dont l'énoncé demande la valeur est $\prod_{k=1}^{n-1} v_k \overline{v_k}$. Il suffit alors de trouver un polynôme dont les racines (simples) sont les v_k et leurs conjugués, et d'appliquer ensuite les relations entre coefficients et racines, qui donnent entre autres la valeur du produit des racines.

On pose $Q(X) = P(X-2i)$: les racines (simples) de Q sont les v_k pour $1 \leq k \leq n-1$. Par ailleurs, les racines (simples) de $\overline{Q}$ sont évidemment les $\overline{v_k}$ pour $1 \leq k \leq n-1$. Un polynôme possible est alors $Q\overline{Q}$ avec

$$Q = (X-2i+i)^n - (X-2i-i)^n = (X-i)^n - (X-3i)^n = 2inX^{n-1} + \dots + (-i)^n(1-3^n).$$

Le coefficient dominant et le coefficient constant de $Q\overline{Q}$ sont donc respectivement égaux à

$$a_{2n-2} = |2in|^2 = 4n^2$$

$$a_0 = |(1-3^n)(-i)^n|^2 = (3^n-1)^2.$$

Le produit des racines de $Q\overline{Q}$ vaut $(-1)^{2n-2} \frac{a_0}{a_{2n-2}}$, donc

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left[4 + \cotan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right] = \frac{(3^n-1)^2}{4n^2}.$$

On vérifie par un calcul mental que l'égalité est bien réalisée pour $n = 2, 3$ et 4 , les valeurs des deux membres étant respectivement 4 , $(\frac{13}{3})^2$ et 100 .

Exercice 5 : Centrale

On note (E) l'équation proposée, et on suppose $n \geq 1$ (l'équation s'écrit $0 = 0$ si $n = 0$). Comme $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$ et comme $-i$ n'est pas racine de $(z-i)^n - (z+i)^n = 0$, on a

$$(E) \Leftrightarrow (z+i)^n[(z-i)^n - (z+i)^n] = 0 \Leftrightarrow z = -i \quad \text{ou} \quad \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = 1.$$

On résout pour terminer

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = 1 \quad \text{et} \quad z \neq -i \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \frac{z-i}{z+i} = e^{2ik\pi/n} \quad \text{et} \quad z \neq -i$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad z = -i \frac{e^{2ik\pi/n} + 1}{e^{2ik\pi/n} - 1} = -\frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)} = -\cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{et}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad z = -\cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

L'équation polynomiale proposée possède donc $2n - 1$ solutions comptées avec leur ordre de multiplicité : $-i$, qui est d'ordre n , et les $n - 1$ solutions simples $-\cotan(\frac{k\pi}{n})$ pour $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.

Exercice 6 : Si $Q = \sum_{k=0}^n c_k X^k$ est un polynôme à coefficients complexes, on note $\overline{Q}$ le polynôme $\sum_{k=0}^n \overline{c_k} X^k$. On suppose P non constant dans ce qui suit [si P est constant, la décomposition $P = (\sqrt{P})^2 + 0^2$ convient].

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines *réelles* deux à deux distinctes de P , de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$. Comme P est à coefficients réels, si z est une racine complexe non réelle de P , alors $\bar{z}$ est aussi une racine de P , et avec la même multiplicité. De plus $(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2$, et la fonction polynomiale associée est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Si l'on note $\{\beta_1, \overline{\beta_1}\}, \dots, \{\beta_s, \overline{\beta_s}\}$ les paires deux à deux distinctes de racines complexes non réelles de P , de multiplicités respectives $\ell_1, \dots, \ell_s$, il existe un réel λ (c'est le coefficient dominant de P , il est nécessairement positif : observer la fonction associée au voisinage de $+\infty$) tel que

$$P = \lambda \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{j=1}^s [(X - \beta_j)(X - \overline{\beta_j})]^{\ell_j}$$

La fonction polynomiale réelle $x \mapsto P(x)$ est du signe de $\prod_{k=1}^r (x - \alpha_k)^{m_k}$: cette quantité est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ si et seulement si tous les m_k sont pairs, ce que l'on écrit $m_k = 2n_k$, avec $n_k \in \mathbb{N}^*$. On pose alors

$$Q = \sqrt{\lambda} \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{n_i} \prod_{j=1}^s (X - \beta_j)^{\ell_j} \in \mathbb{C}[X],$$

de sorte que $P = Q\overline{Q}$. En décomposant chaque coefficient c_k de Q sous la forme cartésienne $c_k = a_k + ib_k$ avec $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$, on peut mettre Q sous la forme $A + iB$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$, et donc $\overline{Q} = A - iB$. Par suite

$$P = Q\overline{Q} = (A + iB)(A - iB) = A^2 + B^2.$$

Exercice 7 : MP 2022

1. Par récurrence (double) on montre que $\deg(U_n) = n$ et U_n a pour coefficient dominant 2^n .
2. Par récurrence double en utilisant les formules de transformation de somme en produit.
3. Les nombres $\cos(\frac{k\pi}{n+1})$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont d'après 2. racines de U_n , il y en a n distinctes par

injectivité de la fonction cosinus sur $]0, \pi[$ donc $U_n = 2^n \prod_{k=1}^n (X - \cos(\frac{k}{n+1}\pi))$.

Exercice 8 : X - Centrale - CCINP

1. Soit a racine de P . Alors $P(a) = 0$ et $P \in E$ donne $P(a^2) = 0$. Donc par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(a^{2^n}) = 0$.
2. Soit a racine de P telle que $a \neq 0$ et $|a| \neq 1$, alors les $|a^{2^n}|$ sont deux à deux distincts donc les a^{2^n} pour $n \in \mathbb{N}$ aussi, ce qui fournit une infinité de racines à P , absurde.
3. On a $P((X+1)^2) = P(X-1)P(X)$ donc si a est racine, $(a+1)^2$ aussi.
Soit a une racine réelle de P , alors $a = 0$ ou $a = 1$ d'après ci-dessus. Or si 0 est racine, 1 est racine puis 2^2 , puis a_n tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = (a_n + 1)^2$. La suite ainsi définie est une suite d'entiers strictement croissante qui fournit une infinité de racines pour P , absurde. Donc P n'a pas de racines réelles.
4. Soit a racine, alors a^2 et $(a+1)^2$ sont racines donc $|a|^2 = |a+1|^2$ donc $a = j$ ou $a = j^2$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $P = a(X-j)^n(X-j^2)^n = a(1+X+X^2)^n$. Réciproquement si P est de cette forme, $P \in E$ ssi $a = 1$ ce qui donne $P = (1+X+X^2)^n$. Donc $E = \{(1+X+X^2)^n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 9 : CCINP 2025

1. u admet un polynôme annulateur de la forme X^p avec $p \in \mathbb{N}^*$ donc 0 est la seule valeur propre de u et $\chi_u = X^3$. u est diagonalisable ssi $u = 0$.
2. u est trigonalisable avec des 0 sur la diagonale car son polynôme caractéristique est scindé.
3. Si a ou $c = 0$, $\text{rg}(u) = 1$, $\dim \text{Ker} u = 2$ et on a par produit $u^2 = 0$, donc $\text{Im} u \subset \text{Ker} u$. On pose e_2 une base de $\text{Im} u$ (donc $u(e_2) = 0$), que l'on complète en (e_1, e_2) une base de $\text{Ker} u$, et e_3 tel que $e_2 = u(e_3)$. $ee_3 \notin \text{Ker} u$ car $e_2 \neq 0$ donc (e_1, e_2, e_3) est une base de E qui convient.
4. Si a et $c \neq 0$, u est de rang 2, $\dim \text{Ker} u = 1$, avec un calcul utilisant 2., $u^2 \neq 0$, il existe donc $x \in E$ tel que $u^2(x) \neq 0$ et $(u^2(x), u(x), x)$ forme une base qui convient (de cardinal 3 et vérifier qu'elle est libre).

Exercice 10 : CCINP 2025 sans préparation

1. A est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral.
2. Les racines de $P = X^3 + 4X^2 + 5X$ sont 0, $2 + i$, $2 - i$. Le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines.
3. D'après 1. et 2., A est diagonalisable et a pour seule valeur propre 0 donc est nulle. Réciproquement la matrice nulle est solution, c'est donc la seule.

Exercice 11 : CCINP 2022

1. Soient $X, Y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On vérifie que : $f(\alpha X + Y) = \alpha f(X) + f(Y)$ par linéarité de la trace. Donc f est linéaire.
2. (a) Ici $\text{tr} A = \frac{1}{2}$. Donc $f(A) = A - 2\text{tr}(A)A = 0$ ce qui montre que $A \in \text{Ker} f$.
(b) Ici $\text{tr} A \neq \frac{1}{2}$. Soit $X \in \text{Ker} f$. Alors $X = 2\text{tr}(X)A$ donc par linéarité de la trace, $\text{tr}(X) = 2\text{tr}(X)\text{tr}(A)$ donc avec l'hypothèse, $\text{tr}(X) = 0$. Ainsi, $f(X) = X = 0$ donc $X = 0$. On vient donc de montrer que $\text{Ker} f = \{0\}$.
(c) Si $\text{tr} A \neq \frac{1}{2}$, f est injective d'après b. Or f est un endomorphisme de E qui est de dimension finie donc est bijective. Réciproquement, et par contraposée, si $\text{tr} A = \frac{1}{2}$, f n'est pas injective puisque $\text{Ker} f \neq \{0\}$ d'après a. donc n'est pas bijective. Finalement on a l'équivalence.
3. On suppose $\text{tr} A = \frac{1}{2}$. On a déjà $A \in \text{Ker} f$ donc $\text{Vect}(A) \subset \text{Ker} f$. Soit $X \in \text{Ker} f$. $f(X) = 0$ donne $X = \text{tr}(X)A$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $X = \alpha A$ et $X \in \text{Vect}(A)$. On a donc $\text{Ker} f = \text{Vect}(A)$.

Exercice 12 : CCINP 2025

1. A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples donc est diagonalisable. Et son spectre est inclus dans $\{2, 3\}$. Or si 2 est la seule valeur propre, $A = 2I_n$ et ne vérifie pas l'hypothèse, de même si 3 est la seule valeur propre donc $\text{Sp}(A) = \{2, 3\}$.
2. (a) On vérifie la linéarité.
(b) On écrit $D = \begin{pmatrix} 2I_r & 0 \\ 0 & 3I_{n-r} \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$ et on obtient $f = 5id + g$ avec $g : \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -M_1 & 0 \\ 0 & M_4 \end{pmatrix}$, on trouve g diagonalisable donc finalement $\text{Sp}(f) =$

$\{4, 5, 6\}$ avec les espaces propres associés dont la somme des dimensions vaut n^2 donc f diagonalisable.

Exercice 13 : CCINP 2023 sans préparation

1. On vérifie que Φ est linéaire. Puis $\Phi(1) = X^2$, $\Phi(X) = X^3$, $\Phi(X^2) = 1$, et $\Phi(X^3) = X$ donc $\Phi(\mathbb{R}_3[X]) \subset \mathbb{R}_3[X]$ donc Φ est bien un endomorphisme.
2. Les calculs ci-dessus donnent la matrice A de Φ dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix}$$

donc $A^2 = I_4$ et Φ est une symétrie vectorielle, elle est diagonalisable, admet pour valeurs propres 1 et -1 et les sous-espaces propres $E_1 = \text{Vect}(1 + X^2, 1 + X^3)$ et $E_{-1} = \text{Vect}(1 - X^2, X - X^3)$ sont supplémentaires.

3. A est donc inversible d'inverse elle-même, Φ est un automorphisme.

Exercice 14 : CCINP 2023

1. vu en TD.
2. On écrit $M = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$ avec $AB = BA$, on a $DM = MD$ donc on peut appliquer le binôme de Newton et comme $n^2 = 0_{2n}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$ donc $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$.
3. Supposons A diagonalisable et $B = 0$, alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ annulateur de A scindé à racines simples donc $P(M) = 0$ donc P est annulateur de M et scindé à racines simples donc M est diagonalisable. Supposons M diagonalisable, alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ annulateur de M scindé à racines simples donc $P(A) = 0$ ce qui donne, par la même caractérisation, A diagonalisable et $P'(A)B = 0$. Comme A est diagonalisable, elle est semblable à D diagonale qui a pour coefficients les valeurs propres de A et d'après 1. $P'(A)$ est semblable à $P'(D)$. Or comme $P(A) = 0$, les valeurs propres de A sont racines de P , et P étant scindé à racines elles ne sont pas racines de P' donc $P'(D)$ est diagonale à coefficients diagonaux non nuls donc $P'(A)$ est inversible et $P'(A)B = 0$ donne $B = 0$.

Exercice 15 : CCINP

1. On calcule $\chi_{A_m} = (X - 1)(X + m - 1)^2$, $\text{Sp}(A_m) = \{1, 1 - m\}$, (1 est la seule valeur propre si $m = 0$) et $(1, 1, 1)^T$ est vecteur propre associé à 1, il forme une base de E_1 si $m \neq 0$. Si $m = 0$, E_1 est un plan vectoriel engendré par $((1, 0, 1)^T, (0, 1, 0)^T)$. Si $m \notin \{0, 2\}$, l'espace propre associé à $1 - m$ est une droite engendrée par $(1, 0, 1)^T$; si $m = 2$, E_{1-m} un plan vectoriel d'équation $-2x + my + 2z = 0$.
2. A_m est diagonalisable ssi $m = 2$ et inversible ssi $m \neq 1$.

Exercice 16 : ENSEA

1. $\chi_A = (X - 1)^3$ donc 1 est l'unique valeur propre de A , elle n'est pas diagonalisable (sinon serait égale à I_3). E_1 est de dimension 2 et a pour équation $y - z = 0$.
2. On peut donc choisir $e_3 \notin \text{Ker}(f - \text{id})$ (si $f \in L(\mathbb{R}^3)$ est canoniquement associé à A), $e_2 = f(e_3) - e_3 \in \text{Ker}(f - \text{id})$ puisque $(A - I)^2 = 0$, et e_1 qui complète (e_2) en une base de $\text{Ker}(f - \text{id})$ par exemple : $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 0)$. Si P est la matrice des vecteurs (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique, P est bien inversible (donc ils forment une base de $\mathbb{R}^3$ et $A = PBP^{-1}$).

3. Par récurrence, $A^n = PB^nP^{-1}$. B^n est diagonale par blocs, par récurrence $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{donc } B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On a $A = I + N$ avec $N = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ qui est encore diagonale par blocs avec

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ telle que } C^2 = 0 \text{ donc en appliquant le binôme de Newton, } A^n = I + nN.$$

Exercice 17 :

1. L'ensemble cherché est le noyau de l'application linéaire Trace : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, donc c'est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = 0,$$

donc A est nilpotente d'ordre 2 et elle n'est pas diagonalisable, car 0 est sa seule valeur propre (la seule matrice diagonalisable n'ayant que 0 pour valeur propre est la matrice nulle).

On calcule aussi

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = I_2,$$

donc B n'est pas nilpotente puisqu'elle est inversible et elle est diagonalisable, car elle est annulée par le polynôme $P = X^2 - 1$ qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nilpotente non nulle : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$. Son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}$ et de degré deux, et comme la seule valeur propre possible de M est 0 (puisque si λ est valeur propre alors $\lambda^p = 0$ donc $\lambda = 0$), c'est $\chi_M(X) = X^2$. D'après le théorème de Cayley Hamilton, il est annulateur de M donc $M^2 = 0$. Pour la suite de la démonstration, on not m l'endomorphisme canoniquement associé à M . On a donc $\text{Im } m \subset \text{Ker } m$ et $\text{Im } m \neq \{0_E\}$: posons $e_1 \in \text{Im } m$ tel que $e_1 \neq 0_E$, alors $m(e_1) = 0_E$ et il existe $e_2 \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $e_1 = m(e_2)$. La famille (e_1, e_2) est une famille de 2 vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$, et cette famille est libre ($ae_1 + be_2 = 0 \Rightarrow am(e_2) + bm(e_2) = 0 \Rightarrow be_2 = 0 \Rightarrow b = 0$ puisque $e_2 \neq 0$, il reste $ae_1 = 0$ donc $a = 0$). Dans la base (e_1, e_2) , la matrice de m est N : M est N sont bien semblables.

La réciproque est évidente : $N^2 = 0$ donc M^2 est semblable à la matrice nulle et donc c'est la matrice nulle.

4. Non, contre exemple : A est nilpotente, N est nilpotente mais $A + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ne l'est pas (elle est inversible).

5. Non, contre exemple : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont diagonalisables mais la somme $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

Exercice 18 : CCINP 2022

1. Soit λ une valeur propre de u (réelle car $u \in L(E)$ où E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel), $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ d'après le cours. C'est absurde car cette équation admet un discriminant strictement négatif donc n'admet pas de racines réelles. Donc u n'admet pas de valeurs propres.

2. (a) Soit $x \neq 0_E$ et $y \in E$. Si (x, y) est liée, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $a.x + b.y = 0$. On a $b \neq 0$ car sinon on aurait $a.x = 0_E$ et comme $x \neq 0_E$, $a = 0$ ce qui est exclu. On a donc en posant $\alpha = -\frac{a}{b}$, $y = \alpha.x$. La réciproque est évidente, si x et y sont colinéaires, (x, y) est liée.

- (b) Comme d'après 1., il n'existe pas $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \alpha x$, $(x, u(x))$ est libre, et de cardinal 2 en dimension 2 donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

On calcule $u(u(x)) = u(x) - x$ en utilisant le polynôme annulateur de u donc la matrice de u dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. χ_u est de degré n , ne possède que des racines complexes non réelles et est à coefficients réels donc pour chacune de ses racines, sa conjuguée est racine de même multiplicité, le degré de χ_u est donc pair.
4. On note $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0_E$. $(x, u(x))$ est libre. Si $n = 2$ c'est terminé, et $B = (x, u(x))$ convient. Sinon, on pose $y \in E \setminus \text{Vect}(B)$, alors $(x, u(x), y)$ est libre et d'après 1. $(y, u(y))$ est libre, on peut vérifier alors que $(x, u(x), y, u(y))$ est libre. Si $n = 4$, c'est une base de E .
Sinon, supposons $B_k = (x_1, u(x_1), \dots, x_k, u(x_k))$ construite libre avec $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Comme $2k < n$, il existe $x_{k+1} \in E \setminus \text{Vect}(B_k)$ et on complète B_k en $B_{k+1} = (B_k \cup (x_{k+1}, u(x_{k+1})))$ qui est libre. Au final, on obtient B_p de la forme : $(x_1, u(x_1), \dots, x_p, u(x_p))$ libre de cardinal $n = 2p$ base de E dans laquelle la matrice de u est la matrice voulue.
5. Si u est solution, d'après ce qui précède, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est la matrice précédente. Réciproquement, $A^2 = A - I_2$ donc par produit par blocs, la matrice précédente M vérifie $M^2 = M - I_n$ donc toute matrice semblable à cette matrice vérifie également cette équation donc l'endomorphisme qui y est canoniquement associé est solution.

Exercice 19 : MT 2025

1. Oui (polynôme scindé à racines simples)
2. $Sp(M) \subset \{0, 3i, -3i\}$ donc M diagonalisable ssi $M = 0$.
3. Si n est impair, le degré du polynôme caractéristique est impair, or il est à coefficients réels donc admet au moins une racine réelle donc 0 est valeur propre et M non inversible.

Exercice 20 : MT 2025

1. On trouve après calculs que : $P = X(X-1)(X-1-\text{Tr}(AB))$ est annulateur de f .
2. Les racines sont : 0, 1, $1+\text{Tr}(AB)$.
3. Le spectre est inclus dans $\{0, 1, 1+\text{Tr}(AB)\}$. Précisons les espaces propres : $f(M) = M \Leftrightarrow \text{Tr}(AM) = 0$ car $B \neq 0$ donc 1 est bien valeur propre, l'espace propre associé est l'hyperplan noyau de la forme linéaire non nulle ($\text{Tr}(AA^T) \neq 0$ car $A \neq 0$) : $M \mapsto \text{Tr}(AM)$.
Ensuite, $f(M) = 0 \Leftrightarrow M = -\text{Tr}(AM)B \Rightarrow M \in \text{Vect}(B)$.
On a $f(B) = (1+\text{Tr}(AB))B$, donc $B \in \text{Ker } f$ si $\text{Tr}(AB) = -1$, auquel cas $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(B)$. Si $\text{Tr}(AB) = 0$ on remarque que $B \in E_1(f)$.
Si $\text{Tr}(AB) = -1$, on a en fait $f^2 = f$ donc f est une projection et est diagonalisable.
Si $\text{Tr}(AB) = -2$, on a $f^2 = \text{id}$ donc f est une symétrie et est diagonalisable.
Sinon, si $\text{Tr}(AB) \neq 0$, f admet un polynôme P annulateur scindé à racines simples donc est diagonalisable. Si $\text{Tr}(AB) = 0$, on a $\dim E_1(f) = n^2 - 1$, 0 n'est pas valeur propre 1 est la seule valeur propre et $f \neq \text{id}$ donc f n'est pas diagonalisable.

Exercice 21 : MT 2022

1. On a $f \circ (f - \text{id}_E) = 2\text{id}_E$ donc f est bijective et $f^{-1} = \frac{1}{2}(f - \text{id}_E)$.
Soit $x \in \text{Ker}(f - 2\text{id}_E) \cap \text{Ker}(f + \text{id}_E)$. On a alors $f(x) = 2x$ et $f(x) = -x$ donc $x = 0_E$, ce qui fait que les deux noyaux sont en somme directe.

Soit $x \in E$. L'hypothèse donne : $(f - 2id_E) \circ (f + id_E) = (f + id_E) \circ (f - 2id_E) = 0$ donc $f(x) + x \in \text{Ker}(f - 2id_E)$ et $f(x) - 2x \in \text{Ker}(f + id_E)$. De plus $x = \frac{1}{3}(f(x) - 2x) + \frac{1}{3}(f(x) + x)$, donc $x \in \text{Ker}(f + id_E) + \text{Ker}(f - 2id_E)$; ce qui montre que $E = \text{Ker}(f + id_E) + \text{Ker}(f - 2id_E)$.

Finalement $E = \text{Ker}(f + id_E) \oplus \text{Ker}(f - 2id_E)$.

2. On note $p = f - 2id_E$ et $q = f + id_E$. On a $p \circ q = q \circ p = 0$ et $f = \frac{1}{3}(p + 2q)$. On peut appliquer

la formule du binôme de Newton ($p \circ q = q \circ p$). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $f^n = \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k q^k p^{n-k}$.

Or $p^2 = f^2 - 4f + 4id_E = -3f + 6id_E = -3(f - 2id_E) = -3p$ donc par récurrence $p^n = (-3)^{n-1}p$.

De même $q^2 = f^2 + 2f + id_E = 3(f + id_E) = 3q$ donc $q^n = 3^{n-1}q$.

De plus pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $q^k \circ p^{n-k} = 0$ donc il reste :

$$f^n = \frac{1}{3^n} (2^n q^n p^0 + q^0 p^n) = \frac{1}{3^n} (2^n \times 3^{n-1} q + 3^{n-1} p) = \frac{1}{3} (2^n q + p) = \frac{1}{3} ((2^n + 1)f + (2^n - 2)id_E).$$

Exercice 22 :

Comme $rg(A) = 2$, zéro est valeur propre de A d'ordre au moins $n - 2$, le sous-espace propre correspondant (le noyau) étant de dimension $n - 2$ d'après la formule du rang.

Il reste (au plus) deux (autres) valeurs propres à découvrir, notées λ et μ . Pour cela, on utilise la trace : $\text{tr } A = (n - 2)0 + \lambda + \mu = 0$ par hypothèse. On en déduit que les deux dernières valeurs propres sont opposées.

Si elles étaient nulles, alors zéro serait la seule valeur propre de A : comme A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, elle serait semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte, donc serait nilpotente d'ordre au plus n selon un calcul bien connu, donc A^n serait nulle, ce qui n'est pas le cas. On peut aussi invoquer le théorème de Cayley-Hamilton pour dire que $Sp(A) = \{0\}$ implique $\chi_A = X^n$, donc $A^n = 0$.

Par suite, A possède, outre zéro, deux valeurs propres non nulles et opposées, donc distinctes. Elles sont donc simples, puisque zéro est déjà d'ordre au moins $n - 2$. Par suite, la somme des dimensions des sous-espaces propres de A vaut $n - 2 + 1 + 1 = n$, donc A est diagonalisable.

â

Exercice 23 : ENSAM

On suppose que $n \geq 2$. La matrice M est symétrique réelle donc diagonalisable. Elle s'écrit

$$M = bJ_n + (a - b)I_n$$

où J_n est la matrice ne contenant que des 1. Comme J_n est symétrique réelle, elle est diagonalisable, son rang est 1 donc zéro est valeur propre d'ordre $(n - 1)$ et le sous-espace propre associé est l'hyperplan H d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$. La dernière valeur propre est n (par la trace) et le sous-espace propre associé est la droite $H^\perp = \text{Vect}(U)$ où

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En notant P une matrice dont la 1^{re} colonne est U et les suivantes constituées d'une base de H (au choix), on a

$$M = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \text{diag}(a + (n - 1)b, a - b, \dots, a - b).$$

On en déduit que

$$\det(M) = (a + (n - 1)b)(a - b)^{n-1}.$$

Si $b \neq 0$, la matrice M possède deux valeurs propres distinctes : $a + (n - 1)b$ et $a - b$, de multiplicités respectives 1 et $n - 1$, qui sont aussi les dimensions des sous-espaces propres correspondants.

Si $b = 0$, alors $M = aI_n$.

Exercice 24 : IMT

1. Soit $y \in \text{Kerg} \cap \text{Im} f$. Il existe $x \in E$, $y = f(x)$ et $g(y) = g(f(x)) = 0$. Donc $f(g(f(x))) = f(x) = 0$ ce qui donne bien $y = 0$ d'où $\text{Kerg} \cap \text{Im} f = \{0\}$.
Soit $x \in E$. On a $g(x) = g(f(g(x)))$ donc $g(x - f(g(x))) = 0$ donc $x - f(g(x)) \in \text{Kerg}$. D'autre part, $f(g(x)) \in \text{Im} f$ et on a bien $x = x - f(g(x)) + f(g(x))$. Donc $E = \text{Kerg} \oplus \text{Im} f$.
2. Soit $y \in f(\text{Im} g)$. Il existe $x \in \text{Im} g$ tel que $y = f(x)$ donc il est clair que $y \in \text{Im} f$. Réciproquement, soit $y \in \text{Im} f$. Par hypothèse, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) = f(g(f(x)))$, et comme $g(f(x)) \in \text{Im} g$, on a bien $y \in f(\text{Im} g)$.

Exercice 25 : IMT

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose A inversible. On a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_{AB}(\lambda) = \det(\lambda I_n - AB) = \det(\lambda A A^{-1} - AB) = \det(A) \det(\lambda A^{-1} - B) = \det(\lambda A^{-1} A - BA) = \det(\lambda I_n - BA) = \chi_{BA}(\lambda)$. Donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. On suppose A non inversible. Si A n'admet que la valeur propre nulle, 1 n'étant pas valeur propre, on peut prendre $p_0 = 1$ et $A - \frac{1}{p_0} I_n$ sera inversible.

Sinon, A possède au moins une valeur propre non nulle, on note $r = \min\{|\lambda|; \lambda \in Sp(A) \setminus \{0\}\}$.

Comme $\frac{1}{p}$ tend vers 0 quand $p \rightarrow +\infty$, il existe p_0 tel que pour $p \geq p_0$, $\frac{1}{p} < r$ et alors $A - \frac{1}{p} I_n$ sera inversible car $\frac{1}{p}$ ne peut pas être valeur propre de A .

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On note alors $C_p = A - \frac{1}{p} I_n$ qui est inversible pour p assez grand. D'après 1., $\chi_{C_p B} = \chi_{B C_p}$ ce qui s'écrit :

$$\det(\lambda I_n - AB + \frac{1}{p} B) = \det(\lambda I_n - BA + \frac{1}{p} B)$$

Or les deux suites de matrices $(\lambda I_n - AB + \frac{1}{p} B)_p$ et $(\lambda I_n - BA + \frac{1}{p} B)_p$ convergent toutes les deux respectivement vers $\lambda I_n - AB$ et $\lambda I_n - BA$. Il reste à utiliser la continuité de l'application déterminant (car par exemple polynomiale en les coefficients de A) pour obtenir : $\det(\lambda I_n - AB) = \det(\lambda I_n - BA)$, ceci étant vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a bien $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 26 : X Les relations $E_{i,j} E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$ sur les produits des éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnent :

$$\forall (i, j, k, \ell) \in \{1, \dots, n\}^4, \quad \varphi(E_{i,j} E_{k,\ell}) = \delta_{j,k} \varphi(E_{i,\ell}) \quad \text{et} \quad \varphi(E_{k,\ell} E_{i,j}) = \delta_{\ell,i} \varphi(E_{k,j}).$$

La propriété de φ donne alors : $\forall (i, j, k, \ell) \in \{1, \dots, n\}^4, \quad \delta_{j,k} \varphi(E_{i,\ell}) = \delta_{\ell,i} \varphi(E_{k,j})$.

Pour $j = k = 1$ et $i = \ell$, on obtient $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad \varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{1,1})$.

Pour $j = k = 1$ et $i \neq \ell$ on obtient $\forall (i, \ell) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad i \neq \ell \Rightarrow \varphi(E_{i,\ell}) = 0$.

Il vient donc, par linéarité de φ :

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \varphi(E_{i,j}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{1,1}) \text{tr}(A).$$

Alors $\varphi = \varphi(E_{1,1}) \text{tr}$. La condition $\varphi(I_n) = n$ donne enfin $\varphi(E_{1,1}) = 1$, donc $\varphi = \text{tr}$.

Exercice 27 : Centrale

Comme A est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux $a_{k,k}$. Elle admet n valeurs propres distinctes donc est diagonalisable donc semblable à la matrice D diagonale de coefficients diagonaux les $a_{k,k} = e^{\frac{i(2k+1)\pi}{n}}$. Donc par récurrence immédiate, A^n est semblable à D^n qui a pour coefficients diagonaux les $a_{k,k}^n = e^{i(2k+1)\pi} = -1$, cad A est semblable à $-I_n$ donc égale à $-I_n$.

Exercice 28 : Centrale 2025

1. On trouve $\chi_B = (X-1)(X+1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ qui est scindé à racines simples donc B est diagonalisable.
2. On trouve $\chi_B(\lambda) = \chi_A(\lambda^2)$.
3. Z est vecteur propre de B associé à λ ssi $Y = \lambda X$ et X vecteur propre de A associé à λ^2 . On a $X \mapsto Z = \begin{pmatrix} X \\ \lambda X \end{pmatrix}$ qui réalise un isomorphisme de $E_{\lambda^2}(A)$ sur $E_\lambda(B)$ donc $\dim E_{\lambda^2}(A) = \dim E_\lambda(B)$.
4. Si μ est valeur propre de A , elle admet deux racines carrées complexes distinctes λ et $-\lambda$ sauf si $\mu = 0$.
Si A est diagonalisable et inversible : $\sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim E_\lambda(B) = 2 \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim E_\lambda(A) = 2n$ donc B est diagonalisable.
Si A n'est pas inversible, A admet 0 pour valeur propre, $\sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim E_\lambda(B) = 2 \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim E_\lambda(A) - \dim \text{Ker}(A) \leq 2n - \dim \text{Ker}(A) < 2n$ donc B n'est pas diagonalisable.
Si A est inversible et non diagonalisable, $\sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim E_\lambda(B) = 2 \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim E_\lambda(A) < 2n$ donc B n'est pas diagonalisable.

Exercice 29 : Centrale

1. $|\sum_{i \geq 2} \lambda_i^k| \leq \sum_i |\lambda_i|^k = o(|\lambda_1|^k)$ donc $\text{tr}(A^k) \neq 0$ à partir d'un certain rang. Puis on trouve $t_k \rightarrow \lambda_1$.
2. Par exemple avec $D = \text{diag}(i, -i)$, t_k n'est jamais défini pour k impair, avec $D = \text{diag}(1, j)$, t_k est périodique de période 3 divergente.
3. Voir exercice plus haut similaire. On trouve $\frac{B^k}{k} \rightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1}AP = I + J$ donc $\frac{A^k}{k} \rightarrow PJP^{-1} = A - I$.

Exercice 30 : MP 2025

1. On écrit $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres complexes de A . On a $\chi_A(B) = \prod_{i=1}^n (B - \lambda_i I_n)$ qui est donc un produit de matrices inversibles par hypothèse car les λ_i ne sont pas valeurs propres de B donc qui est inversible.
2. Un sens est clair. Si $AM = MB$ par récurrence on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k M = MB^k$ donc pour tout polynôme P , $P(A)M = MP(B)$ en particulier, en utilisant Cayley Hamilton, $M\chi_A(B) = \chi_A(A)M = 0$. Donc si $M \neq 0$, $\chi_A(B)$ ne peut pas être inversible ce qui contredit 1., donc $M = 0$.
3. L'application $X \mapsto AX - XB$ est linéaire et injective d'après 2. donc est un isomorphisme.

Exercice 31: MP On a $\text{Sp}(A) = \{3, -12\}$ et $E_3(A) = \text{Vect}((U = (1, 0))$, $E_{-12}(A) = \text{Vect}(V = (1, -3))$.

Soit M solution, alors $MA = AM$. Or l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Com}(A) = \text{Vect}(I, A)$ donc M et A codiagonalisables avec $P = \text{mat}(U, V) \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $A = P\Delta P^{-1}$ et $M = PDP^{-1}$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ et D diagonale. Comme M est solution, $D = \text{diag}(a, b)$ vérifie $D^3 + 2D = \text{diag}(3, -12)$. ce qui donne $a^3 + 2a = 3$ et $b^3 + 2b = -12$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ donc $a = 1$ et $b = -2$. Donc M est de la forme PDP^{-1} avec $D = \text{diag}(1, -2)$. Réciproquement, cette matrice convient.

Exercice 32: MP

1. On note $f = \Psi - \text{tr}(A)\text{id}$, f vérifie $f^2 = \text{tr}(A)f$ donc le polynôme $P = (X - \text{tr}(A))(X - 2\text{tr}(A))$ est annulateur de Ψ scindé à racines simples si $\text{tr}(A) \neq 0$ auquel cas Ψ est diagonalisable. Si $\text{tr}(A) = 0$, $\Psi^2 = 0$, la seule valeur propre possible de Ψ est 0 donc Ψ est diagonalisable ssi il est nul, comme $\forall M \in M_n(\mathbb{C}) \Psi(M) = \text{tr}(M)A$ donc Ψ diagonalisable ssi $A = 0$.
2. Supposons $\text{tr}(A) \neq 0$:
 $\Psi(M) = \text{tr}(A)M \Leftrightarrow \text{tr}(M) = 0$ donc l'espace propre associé à $\text{tr}(A)$ est l'hyperplan H d'équation $\text{Tr}(M) = 0$ (noyau de la trace, forme linéaire non nulle), de dimension $n^2 - 1$.
 $\Psi(M) = 2\text{tr}(A)M \Leftrightarrow M \in \text{Vect}(A)$ donc $E_{2\text{tr}(A)}$ est de dimension 1 et $\chi_{\Psi} = (X - \text{tr}(A))^{n^2-1}(X - 2\text{tr}(A))$ et $\text{tr}(\Psi) = (n^2 + 1)\text{tr}(A)$. Si $\text{tr}(A) \neq 0$, $\text{Vect}(A)$ et H sont supplémentaires, on retrouve Ψ diagonalisable.
Si $\text{tr}(A) = 0$, $\chi_{\Psi} = X^{n^2}$ et $\text{tr}(\Psi) = 0$.

Exercice 33: MP

1. Si B était inversible on aurait $B^{-1}AB = A + I_n$ et $\text{tr}(A) = \text{tr}(A) + n$. C'est absurde, donc B n'est pas inversible.
2. On prouve par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que :

$$AB^k - B^kA = kB^k$$

Si B n'était pas nilpotente alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ la matrice *non nulle* B^k serait un vecteur propre de l'endomorphisme $\Phi: M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ attaché à la valeur propre k . Cela ferait une infinité de valeurs propres (tous les entiers naturels) pour un endomorphisme en dimension finie. C'est absurde.

Exercice 34: X ENS

Il y a deux cas extrêmes.

- Si 0 n'est pas valeur propre de f alors $f \in GL(E)$ et $\text{Ker } f = \{0_E\}$, $\text{Im } f = \mathbb{R}^n$ et $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.
- Si 0 est la seule valeur propre de f alors $f = 0$ (car f est diagonalisable) et $\text{Ker } f = \mathbb{R}^n$, $\text{Im } f = \{0_E\}$ et on a à nouveau $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.
- Enfin, dans le cas général, f possède r valeurs propres non nulles $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ avec $1 \leq r \leq n - 1$ et il existe une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $\text{mat}_e(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$.

On voit alors (système d'équations) que $\text{Ker } f = \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ ce qui donne par la formule du rang $\dim \text{Im } f = r$. Or la matrice montre que $\text{Im } f \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ et l'égalité des dimensions donne $\text{Im } f = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$. Il apparaît bien encore que $\text{Ker } f \cap \text{Im } f =$

$\{0\}$.

Exercice 35:

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de f et E_λ l'espace propre (de dimension au moins 1) associé à la valeur propre λ . Soit g' l'endomorphisme induit par g sur E_λ . Alors, g' possède aussi une valeur propre μ . Soit x un vecteur propre de l'espace propre $E_\mu \subset E_\lambda$. Alors x est vecteur propre pour f et g .
2. Si $f \circ g - g \circ f = f$, on peut montrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel non nul n , on a

$$f^n \circ g - g \circ f^n = n f^n.$$

On pose $L_g: \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ telle que $L_g(f) = f \circ g - g \circ f$. Si, pour tout entier naturel n non nul, f^n n'est pas l'endomorphisme nul, ce vecteur est un vecteur propre de L_f pour la valeur propre n . Alors L_g a une infinité de valeurs propres, ce qui n'est pas possible en dimension finie. Il existe donc un entier naturel non nul p pour lequel $f^p = 0$. L'endomorphisme f est donc nilpotent. La seule valeur propre d'un endomorphisme nilpotent étant 0, le seul espace propre de f est $E_0 = \text{Ker}(f)$. Soit $x \in E_0$, alors $(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) = f(x)$, d'où $f(g(x)) = 0$, donc $g(x) \in E_0$. On peut donc considérer g' l'induit de g à E_0 et comme au (a), on en déduit qu'il existe un vecteur propre commun à f et g .

Exercice 36: X ENS 2025

1. On reconnaît que A est une matrice de rang 1, exercice traité en TD. A est diagonalisable si et seulement si $\text{Tr}(A) \neq 0$.
2. On écrit $P = XQ$ avec Q un polynôme tel que $Q(0) \neq 0$ donc de la forme

$$Q(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k \text{ avec } a_0 \neq 0. \text{ On raisonne par analyse synthèse. Soit } x \in E.$$

Analyse: supposons que x s'écrit $x = z + y = f(t) + y$ avec $z \in \text{Im}(f)$ qui s'écrit $z = f(t)$ avec $t \in E$ et $y \in \text{Ker}(f)$, on compose par $Q(f)$ ce qui donne:

$$Q(f)(x) = Q(f) \circ f(t) + Q(f)(y) = P(f)(x) + \sum_{k=0}^d a_k f^k(y) = a_0 y \text{ car } P \text{ annu-}$$

lateur de f et $y \in \text{Ker}(f)$ donc on obtient: $y = \frac{1}{a_0} Q(f)(x)$ et $z = f(t) = x - y$.

Ceci donne le fait que la somme est directe.

Synthèse: réciproquement, on a $x = \frac{1}{a_0} Q(f)(x) + x - \frac{1}{a_0} Q(f)(x)$: on a

$$\frac{1}{a_0} Q(f)(x) \in \text{Ker}(f) \text{ car } P \text{ annulateur de } f \text{ et on calcule: } x - \frac{1}{a_0} Q(f)(x) =$$

$$- \sum_{k=1}^d a_k f^k(x) \in \text{Im}(f)). \text{ Ce qui donne } E = \text{Ker } f + \text{Im } f, \text{ finalement, } E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.$$

Algèbre euclidienne

Exercice 37: CCINP sans préparation

Soit $x \in \text{Ker}(f - id_E)$ et $y \in \text{Im}(f - id_E)$. Il existe $t \in E$ tel que $y = f(t) - t$.

On calcule:

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(t) - t \rangle = \langle x, f(t) \rangle - \langle x, t \rangle = \langle x, f(t) \rangle - \langle f(x), f(t) \rangle = \langle x - f(x), f(t) \rangle = 0$$

car $f \in O(E)$ et $x \in \text{Ker}(f - id_E)$.

Exercice 38: IMT 2025

1. D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker} A = n - 1$ donc 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$; le polynôme caractéristique est $\chi_A = X^{n-1}(X - \text{Tr}(A))$ donc A diagonalisable ssi $\text{Tr}(A) \neq 0$, vu en TD.
2. $\chi_A = X^{n-1}(X - \text{Tr}(A))$.
3. $\text{rg}(\Omega^{-1}J) = \text{rg}(J) = 1$ car $\Omega^{-1} \in \text{Gl}_n(\mathbb{R})$.
4. $\det(\Omega + J) = \det(\Omega)\det(I_n + \Omega^{-1}J) = \chi_{\Omega^{-1}J}(-1) = 1 + \text{Tr}(\Omega^{-1}J)$.

Si on note $U = (11...1)^T$, $\text{Tr}(\Omega^{-1}J) = \sum_{i=1}^n [\Omega^{-1}U]_i = \langle \Omega^{-1}U, U \rangle \leq \|\Omega^{-1}U\| \times \|U\| = \|U\|^2 = n$, en utilisant Cauchy Schwarz sur l'espace $M_{n-1}[\mathbb{R}]$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Exercice 39: On appelle M la matrice cherchée, H le plan de l'énoncé, p la projection orthogonale sur H , et q la projection orthogonale sur la droite $H^\perp$. On a alors $p+q = id$. Un vecteur unitaire et normal à H est $e = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$, et le cours affirme que $q(x) = (e | x)e$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. Alors $p(x) = x - (e | x)e$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, et il suffit d'appliquer cette relation aux vecteurs de la base canonique. On obtient

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 40: ENSEA

En tant que matrice symétrique réelle, M est diagonalisable. Ses valeurs propres (réelles) sont par ailleurs parmi les racines du polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X - 1 = X^2(X - 1) + (X - 1) = (X^2 + 1)(X - 1)$. Par suite, M est diagonalisable et n'a qu'une seule valeur propre réelle, qui vaut 1, donc $M = I_n$.

Exercice 41: ENSAM

1. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ a pour tg $\langle f(e_j), e_i \rangle$ donc $\text{tr } f = \sum_{i=1}^n \langle f(e_i), e_i \rangle$.
2. On considère une base orthonormée de diagonalisation de f :

$$\text{tr}(f \circ g) = \sum_{i=1}^n \langle (f \circ g)(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle g(e_i), f(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle g(e_i), e_i \rangle,$$

et on établit classiquement en considérant une base orthonormée de diagonalisation de g que $\forall x \in E$, $\langle g(x), x \rangle \geq 0$. $\text{tr}(f \circ g)$ est ainsi une somme de termes tous ≥ 0 .

Exercice 42: CCINP 2023

1. Les colonnes de A forment une famille orthonormée ssi $ab+ac+cb=0$ et $a^2+b^2+c^2=1$ ce qui caractérise le fait que A soit orthogonale. Ces deux équations étant vérifiées, $A \in SO_2(\mathbb{R})$ ssi $\det A=1$ ssi $a^3+b^3+c^3-3abc=1$ donc f est une rotation ssi ces 3 équations sont vérifiées.

2. Si $b = c \neq 0$, les équations donnent $a = -\frac{1}{3}$, $b = c = \frac{2}{3}$, on trouve un axe dirigé par $u = (1, 1, 1)$ (base de $\text{Ker}(f - \text{id})$), et $\text{tr}(A) = -1$ donne π pour angle de la rotation si l'axe est orienté par u .

Exercice 43: MT 2023 Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $M^T = M^2$ et $\det(M) \neq 0$.

1. On a $M^4 = M^2 M^2 = (M^T)^2 = M$.
2. $\det(f) \neq 0$ donc f est bijective.
3. L'hypothèse donne $\det(M) = (\det(M))^2$ donc $\det(M) = 1$
4. $M^T M = M^3 = I_2$ puisque $M^4 = M$ et M inversible, donc $M \in O_2(\mathbb{R})$ et $\det(M) = 1$ donne $M \in SO_2(\mathbb{R})$. f est donc une rotation vectorielle telle que $f^3 = \text{id}$ donc son angle θ vérifie $3\theta = 0[2\pi]$ donc $\theta = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Exercice 44: CCINP

1. Classique sans oublier de préciser que ces intégrales sont bien définies et, pour l'axiome de séparation, l'utilisation de la stricte positivité de l'intégrale pour les fonctions continues et le nombre de racines d'un polynôme.
Par une IPP, $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$. On en déduit par récurrence que $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!$ donc $\langle X^i, X^j \rangle = (i+j)!$
2. Le minimum cherché est $d(1, F)^2$ où $F = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^n) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(0) = 0\}$. Ce minimum est unique et atteint en le projeté orthogonal de 1 sur F et $d(1, F)^2 = \|p_G(1)\|^2$ où $G = F^\perp$ (orthogonal de F dans $\mathbb{R}_n[X]$).

F est un sev de dimension n de $\mathbb{R}_n[X]$ donc G est une droite : $G = \text{Vect}(A)$. On considère $(P_0, \dots, P_n)$ l'orthonormalisée de la base canonique, on a : $A = \sum_{k=0}^n \langle P_k, A \rangle P_k$. Or $\langle P_k, A \rangle = \langle P_k - P_k(0), A \rangle + P_k(0) \langle 1, A \rangle = P_k(0) \langle 1, A \rangle$ car $P_k - P_k(0) \in F$. On a donc $A = \langle 1, A \rangle \sum_{k=0}^n P_k(0) P_k$ et donc $\|p_G(1)\|^2 = \frac{|\langle 1, A \rangle|^2}{\|A\|^2} = \frac{1}{\sum_{k=0}^n P_k(0)^2}$.

Calcul de $P_k(0)$: $\langle P_k, P'_k \rangle = 0$ car $P_k \in \text{Vect}(1, \dots, X^{k-1})^\perp$ et $0 = \langle P_k, P'_k \rangle \stackrel{IPP}{=} \frac{1}{2} (\|P_k\|^2 - P_k(0)^2)$ donc $P_k(0)^2 = 1$.

Finalement, ce minimum cherché vaut $\frac{1}{n+1}$.

Exercice 45: CCINP 2022

1. (u, v) est libre: ils ne sont pas colinéaires.
- 2.

(a) On trouve pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $f(e_j) = j.u + v$. Soit $x = \sum_{j=1}^n x_j \cdot e_j \in$

E . On a: $f(x) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot f(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j (ju + v) = \langle x, v \rangle u + \langle x, u \rangle v$.

- (b) Soit $x \in E$. $x \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \langle x, v \rangle = 0$ et $\langle x, u \rangle = 0$ puisque (u, v) est libre donc $\text{Ker } f = \text{Vect}(u, v)^\perp$, il est donc de dimension $n-2$ donc $\text{Im } f$ est de dimension 2 d'après le théorème du rang.
Comme de plus pour tout $x \in E$, $f(x) \in \text{Vect}(u, v)$, $\text{Im } f = \text{Vect}(u, v)$.

3. Soit $\lambda \in \text{Sp}(f) \setminus \{0\}$ et x un vecteur propre associé. On a par définition $f(x) = \lambda x$ donc $x = \frac{1}{\lambda} f(x) \in \text{Im} f$.
4. A étant une matrice symétrique réelle, et B étant orthonormée pour le produit scalaire canonique, f est auto adjoint donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres notés $u_1, \dots, u_n$ associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ d'après le théorème spectral. Comme f a un noyau de dimension $n-2$ et est diagonalisable, il existe deux valeurs propres non nulles dont la somme qui vaut $\text{tr}(f)$ est strictement positive (et vaut $\sum_{i=1}^n 2i > 0$).

Soit $x \in E$, il s'écrit: $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot u_i$ donc $\psi(x) = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot u_i, \sum_{j=1}^n x_j \cdot \lambda_j u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ puisque $(u_1, \dots, u_n)$ est orthonormée. En particulier, $\psi(\sum_{i=1}^n N u_i) = N^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq N^2 \text{tr}(f) \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} +\infty$ donc ψ n'est pas bornée.

5. Comme $\text{Ker} f$ est de dimension $n-2$ et que f est diagonalisable, 0 est valeur propre de multiplicité $n-2$, notons λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres non nulles restantes associés aux vecteurs propres u_1 et u_2 de la base ci-dessus (avec $\lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$). On a donc pour $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot u_i$:

$$\Phi(x) = \frac{\lambda_1 x_1^2}{\|x\|^2} + \frac{\lambda_2 x_2^2}{\|x\|^2}$$

Si par exemple $\lambda_1 \leq \lambda_2$, $\Phi(x) \leq \lambda_2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{\|x\|^2} \leq \lambda_2$. Donc Φ est majorée par λ_2 . De plus, $\Phi(u_2) = \lambda_2$ donc ce majorant est atteint, Φ admet pour maximum λ_2 (la plus grande de ses valeurs propres).

Exercice 46: IMT

Soit E un espace euclidien, r et p deux projections orthogonales de E et λ une valeur propre non nulle de $p \circ r$ associée au vecteur propre u .

- On a $p(r(u)) = \lambda u$ donc $u = \frac{1}{\lambda} p(r(u))$ donc $u \in \text{Im} p$. Comme p est un projecteur, on a donc $p(u) = u$. On calcule $p(r(u) - \lambda u) = p(r(u)) - \lambda p(u) = p(r(u)) - \lambda u = 0$ donc $r(u) - \lambda u \in \text{Ker} p = (\text{Im} p)^\perp$.
- On a $\lambda \|u\|^2 = \lambda \langle u, u \rangle = \langle p(r(u)), u \rangle = \langle r(u), p(u) \rangle$. En effet, p est une projection orthogonale donc un endomorphisme symétrique (vu en TD). On poursuit le calcul: $\lambda \|u\|^2 = \langle r(u), u \rangle = \langle r(u), r(u) + u - r(u) \rangle = \langle r(u), r(u) \rangle + \langle r(u), u - r(u) \rangle$. or $u - r(u) \in \text{Ker} r = (\text{Im} r)^\perp$ donc $\langle r(u), u - r(u) \rangle = 0$ et on trouve: $\lambda \|u\|^2 = \|r(u)\|^2$.
- Comme u est vecteur propre, il est non nul donc on a: $\lambda = \frac{\|r(u)\|^2}{\|u\|^2}$. Or l'inégalité de Bessel donne, puisque r est une projection orthogonale, $\|r(u)\| \leq \|u\|$ donc $\lambda \in [0, 1]$.

Exercice 47: IMT

- $D = H^\perp$ est une droite vectorielle engendrée par le vecteur unitaire $e = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1, 1)$ donc le cours donne pour $X = (x, y, z)$ son projeté orthogonal sur D : $q(X) = \langle X, e \rangle \cdot e = \frac{1}{\sqrt{3}} (x - y + z)^t (1, -1, 1)$.

2. On a $p(X) = X - q(X)$. La matrice est donc:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. La symétrie s en question vérifie: $s = 2p - id$ et on en déduit la matrice.

Exercice 48: Centrale

- La symétrie, la bilinéarité, la positivité sont claires et classiques. Soit $P \in E$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. Alors comme la fonction polynômiale $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[0, 1]$, par stricte positivité, on a pour tout $t \in [0, 1]$, $t^2 P(t)^2 = 0$ donc $P(t) = 0$ donc P admet une infinité de racines et est donc le polynôme nul.
- On vérifie que u est linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ donc c'est un endomorphisme.
On remarque que $X^2 u(P) = ((X^3 - X^4)P')'$ donc par intégration par parties, $\langle u(P), Q \rangle = \int_0^1 (t^4 - t^3)P'(t)Q'(t)dt$, expression symétrique en P et Q , ce qui donne $\langle u(P), Q \rangle = \langle P, u(Q) \rangle$.
- Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $u(X^k) = -(k^2 + 3k)X^k + (k^2 + 2k)X^{k-1}$ donc la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux: les entiers $-k(k+3)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
La matrice n'a pas à être symétrique car la base canonique n'est pas orthonormale pour le produit scalaire considéré.

Exercice 49: MP 2025

- On vérifie que $\langle \varphi(M), N \rangle = \langle M, \varphi(N) \rangle$ en utilisant A symétrique et $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
- A est diagonalisable dans une base orthonormée. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres réelles de A et $X_1, \dots, X_n$ les vecteurs propres associés. On vérifie que $\varphi(X_i X_j^T) = (\lambda_i - \lambda_j)X_i X_j^T$ avec $M_{i,j} = X_i X_j^T \neq 0$ (la famille $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est orthonormale et forme une base orthonormée de $M_n(\mathbb{R})$ de vecteurs propres de φ , les valeurs propres sont les $\lambda_i - \lambda_j$. Donc φ est diagonalisable.
Remarque: le rang de φ vaut: $n^2 - r$ où r est la dimension du noyau cad le nombre de couples (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $\lambda_i = \lambda_j$. Si on note $\mu_1, \dots, \mu_p$ les valeurs propres distinctes de A de multiplicités $m_1, \dots, m_p$, on a pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, m_k^2 possibilités donc $\text{rg}(\varphi) = n^2 - \sum_{k=1}^p m_k^2$.
- On note $f: M \mapsto AM$ et $g: M \mapsto MA$; on a $f \circ g = g \circ f$, et f et g nilpotents car A l'est. On peut ensuite appliquer le binôme de Newton pour obtenir φ nilpotent.

Exercice 50: MP

- Se vérifie.

2. Soit $\lambda \in \text{Sp} f$ et $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$, alors $\lambda \|x\|^2 = (f(x)|x) = \sum_i (x|e_i)^2 > 0$ car $(e_1, \dots, e_n)$ base de E . En particulier f est bijective car 0 n'est pas valeur propre.
3. f^{-1} est autoadjoint défini positif et commute avec f et f et f^{-1} sont diagonalisables (d'après le théorème spectral) donc sont codiagonalisables: en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f et $(u_1, \dots, u_n)$ une base de vecteurs propres de f et de f^{-1} associés, f^{-1} admet pour valeurs propres les $\frac{1}{\lambda_i}$ donc si on pose pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g(u_i) = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} u_i$, g convient (racine carrée d'un endomorphisme auto-adjoint positif). Il n'y a pas unicité.
4. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_j = \sum_{i=1}^n (e_i | f^{-1}(e_j)) e_i$ donc par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base, pour tout i , $(e_i | f^{-1}(e_j)) = \delta_{ij}$ ce qui donne $(e_i | g^2(e_j)) = (g(e_i) | g(e_j)) = \delta_{ij}$.

Exercice 51: X

1. On pose $\phi : M \mapsto AM - MA^T$. On a $N_A = \text{Ker } \phi$, et $\phi(M)^T = -\phi(M^T)$ donc $\phi(S_n(\mathbb{R})) \subset A_n(\mathbb{R})$. Puis $\phi(M_n(\mathbb{R})) \subset \phi(S_n(\mathbb{R})) + \phi(A_n(\mathbb{R})) \subset A_n(\mathbb{R}) + \phi(A_n(\mathbb{R}))$ donc $\dim \Im \phi \leq n(n-1)$ donc par le théorème du rang, $\dim N_A \geq n$.
2. Prenons A symétrique, $N_A = \text{Com}(A) = \{P(A) / P \in \mathbb{R}[X]\} = \{P(A) / P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]\}$ si p est le degré du polynôme minimal de A (par division euclidienne), il suffit donc de choisir A ayant n valeurs propres distinctes pour que $\mu_A = \chi_A$ par exemple $A = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$.

Exercice 52: X

1. Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable. Comme le déterminant de A est le produit de ses valeurs propres (toutes réelles et positives), il est positif.
2. La matrice A_p est évidemment symétrique. On montre ensuite qu'elle est positive. Soit $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. On le complète en ajoutant des zéros pour en faire un vecteur colonne X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et on écrit que $X^T A X \geq 0$. En décomposant A par blocs de manière évidente, on obtient

$$X^T A X = \begin{pmatrix} Y^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_p & B_p \\ C_p & D_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_p Y \\ C_p Y \end{pmatrix} = Y^T A_p Y \geq 0,$$

et ceci pour tout $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Il suffit alors d'appliquer la question précédente.