

Préparation aux oraux : Probabilités

Exercice 1 : MT 2022

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Z \sim \mathcal{G}(p)$ telle que $Z = X + Y + 1$.

1. Calculer $E(X)$.
2. Déterminer la fonction génératrice G_X de X .
3. Donner la loi de X .

Exercice 2 : MT

Soit X une variable aléatoire dont la fonction génératrice est donnée par : $G_X(t) = ae^{1+t^2}$.

1. Déterminer a .
2. Déterminer la loi de X , $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 3 : CCINP 2022

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ vérifiant : (C) : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X \geq n) > 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N} : x_n = P(X = n / X \geq n)$ (taux de défaillance).

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{P(X = n)}{P(X \geq n)}$ et $1 - x_n = \frac{P(X \geq n+1)}{P(X \geq n)}$
2. (a) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
 (b) On définit Y par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$. Montrer que Y vérifie (C), calculer $y_n = P(Y = n / Y \geq n)$ et montrer que la série $\sum_n y_n$ diverge.
3. Montrer que : $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k) = P(X \geq n)$. Exprimer $P(X = n)$ en fonction de termes de la suite $(x_n)_n$.
4. Montrer que $(x_n)_n$ est constante égale à $p \in]0, 1[$ si et seulement si $X \sim \mathcal{G}(p)$.
5. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X \geq n) = 0$. En déduire la nature de la série $\sum \ln(1 - x_n)$ puis la nature de la série $\sum x_n$.

Exercice 4 : CCINP 2025

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ .

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P(X \leq n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.
2. Trouver un équivalent de $u_n = \int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ quand $n \rightarrow +\infty$.
3. Déterminer $G_X(1)$ et $G_X(-1)$.
4. En déduire la probabilité que X prenne une valeur paire.
5. Soit Y suivant une loi uniforme sur $[[1, 2]]$ indépendante de X . Déterminer la probabilité que XY soit paire.

Exercice 5 : CCINP On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = J - I_3$. On dispose de 3 cases A, B, C et

d'une souris se trouvant à l'instant initial en A. A chaque étape elle se déplace sur une des 2 autres cases de manière équiprobable et indépendamment de sa position.

On pose A_n (resp B_n, C_n) " la souris est en A (resp B, C) à l'instant n" et : $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$.

1. Trouver une relation entre U_{n+1} et U_n .
2. Montrer que M est diagonalisable, déterminer les sous-espaces propres et exprimer M^n .
3. Trouver un polynôme annulateur, puis en déduire M^n à l'aide d'une division euclidienne.
4. Déterminer la limite de U_n en $+\infty$. Interpréter.

Exercice 6 : CCINP

On considère une urne contenant $n - 1$ boules noires et une boule blanche.

1. On effectue une succession de tirages avec remise dans cette urne et on note T la variable aléatoire donnant le rang du premier tirage amenant la boule blanche. Donner les valeurs prises par T , sa loi, son espérance et sa variance.
2. On effectue maintenant des tirages sans remise.
 - (a) Soit X la variable aléatoire donnant le rang du premier tirage amenant la boule blanche. Donner les valeurs prises par X , sa loi, son espérance et sa variance.
 - (b) Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires restantes dans l'urne après le tirage de la boule blanche. Exprimer Y en fonction de X et n . Donner l'espérance de Y ainsi que sa variance.

Exercice 7 : CCINP

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i , et que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$. Montrer que, $\forall \varepsilon > 0, P(|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Exercice 8 : CCINP

On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On note X_n le rang du premier tirage où l'on obtient une boule différente de la première boule tirée.

1. Justifier que X_n est bien une variable aléatoire discrète et donner sa loi.
2. Justifier l'existence de l'espérance de X_n et la calculer.
3. On note Y_n le rang du premier tirage à l'issue duquel toutes les boules ont été tirées au moins une fois. Donner la loi de Y_2 puis celle de Y_3 .

Exercice 9 : CCINP

Soient $X \leftrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \leftrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, indépendantes. On pose $Z = X + Y$.

1. Déterminer la loi de Z .
2. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(X = k | Z = n)$.
3. En déduire la loi de X sachant $(Z = n)$.

Exercice 10 : CCINP

Un promeneur ramasse un nombre N de champignons où N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose qu'un champignon est un bolet avec probabilité p et une morille avec probabilité $1 - p$. On note X la loi du nombre de bolets ramassés, Y la loi du nombre de morilles ramassés.

1. Déterminer la loi conjointe de (N, X) . En déduire la loi de X .
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\text{cov}(X, N)$.

Exercice 11 : Centrale

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On tire aléatoirement k boules en une seule prise. On note X la variable aléatoire donnant le numéro de la plus petite boule tirée.

1. Déterminez la loi de X .
2. Calculer la valeur de $\sum_{i=1}^{n-k+1} \binom{n-i}{k-1}$.
3. Calculer $E(X)$.

Exercice 12 : MP 2025

Soient $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, telle que

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

1. Montrer que $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{n\epsilon^2}$.
2. Montrer que pour tout $t > 0$, $E(e^{tS_n}) \leq \text{ch}^n(t)$.
3. Montrer que $\text{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.
4. En déduire que $P\left(\frac{S_n}{n} \geq \epsilon\right) \leq e^{n\frac{t^2}{2} - nt\epsilon}$.
5. En déduire que $P\left(\frac{S_n}{n} \geq \epsilon\right) \leq e^{-n\frac{\epsilon^2}{2}}$.

Exercice 13 : MP

Les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 , la variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$. On suppose que les variables aléatoires X_1 , X_2 et Y sont indépendantes. On pose $p = P(Y = -1)$. On considère

$$M = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_2^2 \\ YX_2^2 & X_1^2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la probabilité pour que M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la probabilité pour que les valeurs propres de M soient réelles.

Exercice 15 : MP

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de pa-

ramètre $p \in [0, 1[$. On pose : $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = UU^T \in M_n(\{0, 1\})$.

1. Donner les lois de $\text{rg}(M)$ et de $\text{Tr } M$.
2. Quelle est la probabilité pour que M soit une matrice de projection ?
3. On note V le vecteur colonne dont toutes les composantes valent 1 et $S = {}^t VMV$. Calculer l'espérance et la variance de S .

Exercice 16 : MP

Soit $\alpha > 0$.

1. Montrer l'existence d'une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $G_X(t) = \frac{1}{(2-t)^\alpha}$.
2. Donner un équivalent de $P(X = n)$ quand $n \rightarrow +\infty$ dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit $\lambda > 0$. Montrer que $P(X \geq \lambda + \alpha) \leq \frac{2\alpha}{\lambda^2}$.

Exercice 17 : Centrale

Soient (Ω, B, P) un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements. On considère l'événement : $A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$.

1. Montrer que $P(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n)$.
2. On suppose que la série de terme général $P(A_n)$ converge.
 - (a) Déterminer $P(A)$.
 - (b) Soit B l'ensemble des $\omega \in \Omega$ appartenant à une infinité des A_n . Déterminer $P(B)$.
3. On suppose maintenant que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série de terme général $P(A_n)$ diverge. Déterminer $P(A)$.

Exercice 18 : ENS

Soit $s > 1$. On pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = \lambda n^{-s}$. À quelle condition sur λ la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définit-elle une loi de probabilité sur \mathbb{N}^* ?
2. On note Q_s la loi ainsi définie. Admet-elle une espérance ?
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_k = k\mathbb{N}^*$. Montrer que les A_p forment une famille d'événements mutuellement indépendants (au sens de Q_s) lorsque p parcourt l'ensemble des nombres premiers.
4. On ordonne les nombres premiers : $p_1 = 2 < p_2 = 3 < \dots < p_n < \dots$. Montrer que $\zeta(s) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1-p_n^{-s}}$.
5. Nature de la série de terme général $\frac{1}{p_n}$?

Exercice 19 : ENS

Remarque hors-programme :

une famille de réels positifs $(x_i)_{i \in I}$ est sommable ssi $\sum_{i \in I} a_i = \sup \{ \sum_{i \in J} a_j / J \text{ partie finie de } I \}$ est fini

1. Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements 2 à 2 incompatibles et de probabilité strictement positive. Montrer que I est au plus dénombrable.
2. Soit X une variable aléatoire indépendante d'elle-même. Montrer que X est presque sûrement constante.

Exercice 20 : formule du crible (MP 2026)

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

1. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Justifier que pour tout r -uplet de réels (x_1, \dots, x_r) :

$$\prod_{i=1}^r (1 + x_i) = 1 + \sum_{m=1}^r \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq r} x_{i_1} \dots x_{i_m}$$

2. Soient $A, A_1, \dots, A_r \in \mathcal{A}$. Montrer que $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$ et que $\mathbb{1}_{\bigcap_{i=1}^r A_i} = \prod_{i=1}^r \mathbb{1}_{A_i}$.

En déduire que :

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_r) = \sum_{m=1}^r (-1)^{m+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq r} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}) \right)$$