

Préparation aux oraux : Probabilités

Exercice 1 : MT 2022

1. On a par linéarité de l'espérance : $E(Z) = E(X) + E(Y) + 1 = 2E(X) + 1 = \frac{1}{p}$ d'après le cours donc $E(X) = \frac{q}{2p}$ en notant $q = 1 - p$.

2. X et Y sont indépendantes donc X et $Y + 1$ aussi donc $G_Z = G_X \times G_{Y+1}$. De plus pour tout $t \in [-1, 1]$, $G_{Y+1}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y + 1 = n)t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n - 1)t^n = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k)t^{k+1} =$

$t \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$ puisque X et Y ont même loi. On obtient donc : $G_{Y+1}(t) = tG_X(t)$ donc

$G_Z(t) = tG_X(t)^2$. Or par le cours, $G_Z(t) = \frac{pt}{1 - qt}$ donc pour $t \neq 0$, $G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1 - qt}}$ (et $G_X(0) = P(X = 0)$).

On peut vérifier que $G'_X(1) = \frac{q}{2p}$ en cohérence avec le calcul fait au 1.

3. En développe en série entière la fonction trouvée au 2. avec les DSE usuel de $t \mapsto (1 + t)^{-\frac{1}{2}}$ ce qui donne :

$$G_X(t) = \sqrt{p} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} q^n t^n \right)$$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi de X , on obtient : $P(X = 0) = \sqrt{p}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \sqrt{p} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} q^n$.

Exercice 2 : CCINP 2022

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par définition, $x_n = \frac{P(X = n) \cap (X \geq n)}{P(X \geq n)} = \frac{P(X = n)}{P(X \geq n)}$ puisque $(X = n) \subset (X \geq n)$.

$$\text{Donc } 1 - x_n = 1 - \frac{P(X = n)}{P(X \geq n)} = \frac{P(X \geq n) - P(X = n)}{P(X \geq n)} = \frac{P(X \geq n + 1)}{P(X \geq n)}.$$

2. (a) On a : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

(b) Y est bien définie car $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$, on a bien $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $P(Y \geq n) = P(\cup_{k=n}^{+\infty} P(Y = k)) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^N \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} =$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{N} = \frac{1}{n} > 0 \text{ donc } Y \text{ vérifie (C).}$$

Enfin, $y_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$ d'après 1., c'est le terme général d'une série divergente (car équivalent à $\frac{1}{n}$, terme général de la série de Riemann harmonique).

3. On a : $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{P(X \geq k+1)}{P(X \geq k)} = \frac{P(X \geq n)}{P(X \geq 1)} = P(X \geq n)$ par télescopage. On en

déduit que : $P(X = n) = x_n P(X \geq n) = x_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)$.

4. Si $(x_n)_n$ est constante égale à $p \in]0, 1[$ alors $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ d'après 3. donc $X \sim \mathcal{G}(p)$. Réciproquement supposons que $X \sim \mathcal{G}(p)$. On a avec le cours pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P(X \geq n) = P(X > n - 1) = (1 - p)^{n-1}$ donc $x_n = \frac{P(X = n)}{P(X \geq n)} = \frac{p(1-p)^{n-1}}{(1-p)^{n-1}} = p$.

5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P(X \geq n) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} P(X = k)$; or $\sum_{k=1}^{n-1} P(X = k) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$ donc $P(X \geq n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc d'après 3. $\ln\left(\prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - x_k) = \ln(P(X \geq n)) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} -\infty$ donc la série $\sum \ln(1 - x_n)$ diverge. Si $(x_n)_n$ ne converge pas vers 0, la série $\sum x_n$ diverge grossièrement, et si $x_n \rightarrow 0$, on a $\ln(1 - x_n) \sim -x_n$ donc par critère d'équivalence pour des séries à termes positifs, la série $\sum -x_n$ diverge, donc dans tous les cas la série $\sum x_n$ diverge.

Exercice 3 : CCINP 2025

1. On a $P(X \leq n) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. En notant u_n l'intégrale demandée (qui converge bien car

l'intégrande est continue sur \mathbb{R}^+ et intégrable en $+\infty$ car dominée par $e^{-\frac{t}{2}}$ en $+\infty$ par exemple), on obtient par intégration par parties (fonctions C^1 de produit de limite nulle en $+\infty$) pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \lambda^n e^{-\lambda} + n u_{n-1}$ donc $\frac{u_n}{n!} = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} + \frac{u_{n-1}}{(n-1)!}$ donc par

télescopage, $\frac{u_n}{n!} = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = P(X \leq n)$.

2. Comme la somme partielle ci-dessus converge vers 1 (série exponentielle), on trouve $u_n \sim n!$.

3. $G_X(1) = 1$ et $G_X(-1) = e^{-2\lambda}$.

4. $G_x(1) + G_X(-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k) = 1 + e^{-2\lambda}$.

5. $P(XY \text{ paire}) = P((X \text{ paire}) \cap Y = 1) + P(Y = 2) = P(X \text{ paire})P(Y = 1) + P(Y = 2) = \frac{3}{4} + \frac{e^{-2\lambda}}{2}$ par indépendance de X et Y .

Exercice 4 : CCINP

1. La variable aléatoire T mesure le 1^{er} succès dans une suite d'expérience de BERNOULLI indépendantes (« avec remise ») de paramètre $p = \frac{1}{n}$, donc, d'après le cours,

$$T \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right), \quad E(T) = \frac{1}{p} = n \quad \text{et} \quad V(T) = \frac{1-p}{p^2} = n(n-1).$$

2. (a) À l'issue du k -ième tirage infructueux, l'urne contient $(n-k-1)$ boules noires et la blanche, à l'issue du $(n-1)$ -ième tirage infructueux, l'urne ne contient plus que la boule blanche et donc le n -ième tirage est nécessairement un succès, donc $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$.

Pour $1 \leq k \leq n$, $(X = k) = (\cap_{i=1}^{k-1} \bar{B}_i) \cap B_k$ donc, avec la formule des probabilités composées,

$$P(X = k) = P(\bar{B}_1) \cdot P(\bar{B}_2 | \bar{B}_1) \dots P(\bar{B}_{k-1} | \bar{B}_1 \cap \dots \cap \bar{B}_{k-2}) \cdot P(B_k | \bar{B}_1 \cap \dots \cap \bar{B}_{k-1}).$$

Or il est sous-entendu que la probabilité du k -ième tirage est uniforme, c'est-à-dire $P(\overline{B}_i | \overline{B}_1 \cap \dots \cap \overline{B}_{i-1}) = \frac{n-i}{n-i+1}$ (1 boule blanche parmi $n-i+1$), donc $P(X = k) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-i}{n-i+1} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$:

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket), \quad E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

- (b) Si la boule blanche est tirée au k -ième tirage, $X = k$, on a retiré $(k-1)$ boules noires de l'urne, il en reste donc et il reste $Y = n - (k-1) = n+1 - X$ dans l'urne après ce k -ième tirage, donc $E(Y) = n+1 - E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(Y) = V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

Exercice 5 : CCINP Dans le cas où les p_i sont tous égaux à p , c'est la loi faible des grands nombres. Posons

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad m_n = E(M_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i.$$

On a $|M_n - p| \leq |M_n - m_n| + |m_n - p|$ par inégalité triangulaire, et $|m_n - p| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ par hypothèse. Alors, pour n assez grand, $|m_n - p| < \frac{\varepsilon}{2}$, et ainsi pour un tel n , on a l'inclusion

$$\{|M_n - p| \geq \varepsilon\} \subset \left\{ |M_n - m_n| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

donc, par croissance des lois de probabilité, $P(|M_n - p| \geq \varepsilon) \leq P(|M_n - m_n| \geq \frac{\varepsilon}{2})$. Il suffit donc de montrer que $P(|M_n - m_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Or par indépendance des X_i , la variable M_n admet pour variance $V(M_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p_i(1-p_i)$, et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a $p_i(1-p_i) \leq \frac{1}{4}$ (car $\frac{1}{4}$ est la valeur maximale du polynôme $x(1-x)$ sur \mathbb{R}), donc $V(M_n) \leq \frac{1}{4n}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique et donne

$$P\left(|M_n - m_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{4V(M_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2},$$

d'où le résultat.

Exercice 6 : CCINP

- Appelons, à partir du second tirage, «succès» le fait de tirer une boule différente de la première. La probabilité de succès est manifestement $\frac{n-1}{n}$, et $T_n = X_n - 1$ mesure le temps d'attente d'un premier succès dans une suite de tentatives indépendantes les unes des autres. Donc T_n est une variable aléatoire discrète de loi géométrique $\mathcal{G}(\frac{n-1}{n})$.

On en déduit que $X_n = T_n + 1$ est une variable aléatoire discrète de loi donnée par $X_n(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$P(X_n = k) = P(T_n = k-1) = \frac{n-1}{n} \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^{k-2} = \frac{n-1}{n^{k-1}}.$$

- On sait que la variable T_n admet pour espérance et $E(T_n) = \frac{n}{n-1}$ (loi géométrique) donc, par linéarité, X_n admet une espérance, et

$$E(X_n) = 1 + \frac{n}{n-1} = \frac{2n-1}{n-1}.$$

- On a manifestement $Y_2 = X_2$.
— On a $Y_3 = X_3 + T$, où T est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$ (temps d'attente, à partir du tirage X_3 , du tirage de la boule non encore obtenue). Par suite,

$$Y_3(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\},$$

et pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$, on a par σ -additivité et indépendance de X_3 et T (...):

$$\begin{aligned} P(Y_3 = k) &= \sum_{i=2}^{k-1} P(X_3 = i, T = k - i) = \sum_{i=2}^{k-1} P(X_3 = i)P(T = k - i) = \sum_{i=2}^{k-1} \frac{2}{3^{i-1}} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-i-1} \\ &= \frac{2}{3^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-3} 2^j = \frac{2}{3^{k-1}} (2^{k-2} - 1) = \frac{2^{k-1} - 2}{3^{k-1}}. \end{aligned}$$

Rq. On obtient, en itérant, la formule générale $Y_n = \sum_{k=1}^n T_k$, où T_k suit une loi géométrique de paramètre $\frac{k}{n}$.

Exercice 7 : CCINP

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $(Z = n) = \sqcup_{k=0}^n (X = k, Y = n - k)$ donc (réunion disjointe et indépendance),

$$P(Z = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k)P(Y = n - k) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} = e^{-(\lambda+\mu)}$$

donc $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

2. Calcul sans difficulté :

$$\begin{aligned} P_{(Z=n)}(X = k) &= \frac{P(X = k, Z = n)}{P(Z = n)} = \frac{P(X = k, Y = n - k)}{P(Z = n)} = \frac{P(X = k)P(Y = n - k)}{P(Z = n)} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

3. On en déduit que la loi de X sachant $(Z = n)$ est la loi binomiale de paramètre $p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

Exercice 8 : CCINP

1. L'image du couple est donnée par $(N, X)(\Omega) = \{(n, k) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq k \leq n\}$ et $\mathbb{P}(N = n, X = k) = \mathbb{P}(N = n) \times \mathbb{P}_{(N=n)}(X = k)$. De plus les hypothèses donnent :

$$\mathbb{P}_{(N=n)}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

En effet, la loi conditionnelle de X sachant $(N = n)$ est la loi binomiale de paramètre (n, p) puisque X compte alors le nombre de succès « c'est un bolet » dans les n expériences indépendantes consistant à ramasser un champignon. On a alors pour $0 \leq k \leq n$:

$$\mathbb{P}(N = n, X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Montrons alors que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$. En effet pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n, X = k) = e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} (1 - p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{[\lambda(1 - p)]^i}{i!} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}. \end{aligned}$$

2. La variable aléatoire réelle Y vérifie les mêmes hypothèses que X à la différence que la probabilité de ramasser une morille est $1 - p$. On a donc $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda(1 - p))$.

Montrons que X et Y sont indépendantes. Pour $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ l'événement $(X = k, Y = \ell)$ est aussi $(N = k + \ell, X = k)$ et donc d'après la loi conjointe calculée à la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = k + \ell, X = k) &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k+\ell}}{(k + \ell)!} \binom{k + \ell}{k} p^k (1 - p)^\ell = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k+\ell}}{k! \ell!} p^k (1 - p)^\ell \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \times e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^\ell}{\ell!} = \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}(Y = \ell). \end{aligned}$$

Exercice 9 : Centrale

1. La variable X est à valeur dans $\llbracket 1, n - k + 1 \rrbracket$, en effet la valeur maximale de X correspond au tirage des boules numérotées $n - k + 1, n - k + 1, \dots, n$.

Et, pour tout $i \in \llbracket 1, n - k + 1 \rrbracket$, l'événement $X \geq i$ correspond aux tirages de boules numérotées de i à n . Les tirages sont équiprobables, au nombre de $\binom{n}{k}$ au total, tandis que les tirages donnant $X \geq i$ sont au nombre de $\binom{n-i+1}{k}$. Il vient $P(X \geq i) = \frac{\binom{n-i+1}{k}}{\binom{n}{k}}$, donc

$$P(X = i) = P(X \geq i) - P(X > i) = P(X \geq i) - P(X \geq i + 1) = \frac{\binom{n-i+1}{k}}{\binom{n}{k}} - \frac{\binom{n-i}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{n-i}{k-1}}{\binom{n}{k}}$$

via la formule du triangle de Pascal.

2. La même formule du triangle de Pascal donne

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} \binom{n-i}{k-1} = \sum_{i=1}^{n-k+1} \binom{n-i+1}{k} - \binom{n-i}{k},$$

où l'on reconnaît une somme télescopique qui vaut $\binom{n}{k} - \binom{k-1}{k} = \binom{n}{k}$.

3. Comme X est à valeurs entières, on peut utiliser $E(X) = \sum_{i=1}^{n-k+1} P(X \geq i) = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{i=1}^{n-k+1} \binom{n-i+1}{k}$. Cette dernière somme est encore une fois télescopique, elle s'écrit $\sum_{i=1}^{n-k+1} \binom{n-i+2}{k+1} - \binom{n-i+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{k}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, donc, après simplification :

$$E(X) = \frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{k+1}.$$

Exercice 10 : MP 2025

Exercice 11 : MP

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. On procède par récurrence sur q . Les cas $q \leq p$ sont triviaux, et si la formule est vraie pour $q \geq p$, alors elle l'est pour $q + 1$ par formule du triangle de Pascal. D'où le résultat.
2. — Loi de X .

L'univers Ω est ici l'ensemble des permutations d'un ensemble à $a + b$ éléments, muni de la probabilité uniforme. On a manifestement $X(\Omega) = \{a, a + 1, \dots, a + b\}$. Soit $k \in X(\Omega)$.

L'événement $\{X = k\}$ est l'ensemble des tirages (permutations) pour lesquelles $a - 1$ boules blanches et $k - a$ boules noires sont tirées lors des $k - 1$ premiers tirages, la dernière boule blanche est tirée au k -ème tirage, et les $a + b - k$ dernières boules noires sont tirées lors des $a + b - k$ derniers tirages.

Il y a $\binom{k-1}{a-1} a! = a \frac{(k-1)!}{(k-a)!}$ configurations possibles pour les boules blanches (nombre de choix possibles pour les rangs d'apparition des $a - 1$ premières boules blanches, multiplié par le nombre de permutations possibles des boules blanches); il y a $\binom{b}{k-a} (k-a)! = \frac{b!}{(a+b-k)!}$ configurations possibles pour les $k - a$ premières boules noires (nombre de choix possibles pour ces boules noires, multiplié par le nombre de permutations possibles de ces boules); et il y a $(a + b - k)!$ configurations possibles pour les $a + b - k$ dernières boules tirées (nombre de permutation de ces boules).

L'événement $\{X = k\}$ est donc de cardinal $a \frac{(k-1)!}{(k-a)!} \times \frac{b!}{(a+b-k)!} \times (a + b - k)! = a \frac{(k-1)! b!}{(k-a)!}$, et de probabilité

$$P(X = k) = \frac{\text{Card}(\{X = k\})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{a(k-1)! b!}{(k-a)!(a+b)!}.$$

— Espérance de X .

On a $E(X) = \sum_{k=a}^{a+b} k P(X = k) = \sum_{k=a}^{a+b} \frac{ak! b!}{(k-a)!(a+b)!} = \frac{ab! a!}{(a+b)!} \sum_{k=a}^{a+b} \binom{k}{a} = \frac{ab! a!}{(a+b)!} \binom{a+b+1}{a+1}$ par (a), soit après simplification,

$$E(X) = \frac{a(a+b+1)}{a+1}.$$

— Variance de X .

On a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X+1)) - E(X) - E(X)^2$. Or par transfert,

$$E(X(X+1)) = \sum_{k=a}^{a+b} k(k+1)P(X=k) = \frac{ab!a!}{(a+b)!} \sum_{k=a}^{a+b} (k+1) \binom{k}{a}.$$

Et $(k+1)\binom{k}{a} = (a+1)\binom{k+1}{a+1}$, donc $\sum_{k=a}^{a+b} (k+1)\binom{k}{a} = (a+1) \sum_{k=a}^{a+b} \binom{k+1}{a+1}$, et toujours par (a), $\sum_{k=a}^{a+b} \binom{k+1}{a+1} = \sum_{k=a+1}^{a+b+1} \binom{k}{a+1} = \binom{a+b+2}{a+2}$, d'où finalement,

$$E(X(X+1)) = \frac{ab!(a+1)!}{(a+b)!} \binom{a+b+2}{a+2} = \frac{a(a+b+2)(a+b+1)}{a+2}.$$

On a donc

$$V(X) = \frac{a(a+b+2)(a+b+1)}{a+2} - \frac{a(a+b+1)}{a+1} - \left(\frac{a(a+b+1)}{a+1} \right)^2.$$

Exercice 12 : MP : Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de

Bernouilli de paramètre $p \in [0, 1[$. On pose : $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = U^t U \in M_n(\{0, 1\})$.

- On calcule $M = (X_1.U \quad X_2.U \quad \dots \quad X_n.U)$ donc $\text{rg}(M) = 0$ si $U = 0$ et $\text{rg}(M) = 1$ sinon car toutes les colonnes sont proportionnelles à U . Donc $\text{rg}(M)$ suit une loi de Bernouilli. De plus $P([\text{rg}(M)]) = P(\bigcap_{k=1}^n [X_k = 0]) = \prod_{k=1}^n P(X_k = 0) = (1-p)^n$ par indépendance des X_k . Son paramètre vaut donc $1 - (1-p)^n$.

On a $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n X_i^2$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_i^2 suit une loi de Bernouilli de même paramètre p que X_i (le vérifier) donc $\text{Tr}M$ suit une loi binômiale de paramètre (n, p) comme somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernouilli.

- On cherche $P([M^2 = M])$. Or $M^2 = \text{tr}(M)M$ donc $P([M^2 = M]) = P(\text{tr}(M) = 1) = np(1-p)^{n-1}$.
- On note V le vecteur colonne dont toutes les composantes valent 1 et $S = {}^t V M V = {}^t ({}^t U V) ({}^t U V) = (\sum_{i=1}^n X_i)^2$ avec $\sum_{i=1}^n X_i$ qui suit une loi binômiale de paramètre (n, p) d'après le cours. Donc $E(S) = V(S) + E(\sum_{i=1}^n X_i)^2 = np(1-p) + n^2 p^2$.

Exercice 13 : MP

On note f la fonction $t \in]-2, 2[\mapsto \frac{1}{(2-t)^\alpha}$. Elle est de classe \mathcal{C}^∞ et pour tout $t \in]-2, 2[$,

$$f'(t) = \alpha(2-t)^{-\alpha-1}, \quad f''(t) = \alpha(\alpha+1)(2-t)^{-\alpha-2}.$$

- Comme $f(1) = 1$, il s'agit de démontrer que f est développable en série entière au voisinage de zéro, avec un rayon de convergence au moins 1, et des coefficients positifs. Or le développement du binôme affirme que pour tout $t \in]-2, 2[$:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2^{-\alpha} \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{-\alpha} = 2^{-\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\alpha}{n} \left(-\frac{t}{2}\right)^n \\ &= 2^{-\alpha} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-n+1)}{n!} (-1)^n \frac{t^n}{2^n}\right) = 2^{-\alpha} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{2^n n!}\right) \end{aligned}$$

La condition exposée plus haut est manifestement remplie. Grâce à un théorème d'existence du cours, il existe un espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) et une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} dont f est la fonction génératrice. La loi de X est donc donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = 2^{-\alpha} \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)}{2^n n!}.$$

2. Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $P(X = n)$ s'écrit $2^{-\alpha} \frac{(\alpha+n-1)!}{2^n \alpha! n!} = 2^{-\alpha} \frac{(\alpha+n)!}{2^n (\alpha+n) \alpha! n!}$. La formule de Stirling et la limite bien connue $(1 + \frac{\alpha}{n})^n \rightarrow e^\alpha$ quand $n \rightarrow +\infty$ donnent alors

$$P(X = n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{-\alpha} \frac{(\alpha+n)^{\alpha+n} e^{-\alpha-n} \sqrt{2\pi(\alpha+n)}}{2^n (\alpha+n) \alpha! n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 2^{-\alpha} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \frac{(\alpha+n)^{\alpha-1/2} e^{-\alpha}}{2^n \alpha! \sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{-\alpha} n^{\alpha-1}}{\alpha! 2^n}.$$

3. Comme le rayon de convergence de G_X est strictement plus grand que 1, la somme G_X est dérivable en 1, donc X possède une espérance et une variance données par

$$\begin{aligned} E(X) &= G'_X(1) = \alpha \\ V(X) &= G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2 = \alpha(\alpha+1) + \alpha - \alpha^2 = 2\alpha. \end{aligned}$$

L'événement $(X \geq \lambda + \alpha) = (X - E(X) \geq \lambda)$ étant inclus dans $(|X - E(X)| \geq \lambda)$, la croissance de P et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev entraînent que

$$P(X \geq \alpha + \lambda) \leq P(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq \frac{V(X)}{\lambda^2} = \frac{2\alpha}{\lambda^2}.$$

Exercice 14 : Centrale

Il s'agit du lemme de Borel-Cantelli. La partie A envisagée est bien un événement par stabilité de la tribu B par unions et intersections dénombrables.

- Les événements $B_k = \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$ forment une suite décroissante pour l'inclusion, donc par continuité décroissante des lois de probabilité, $P(A) = P(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(B_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n)$.
- Notons R_n le reste d'ordre n de la série convergente $\sum P(A_n)$.
 - Par positivité et sous-additivité des lois de probabilité, on a $0 \leq P(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=k}^{+\infty} P(A_n) = R_{k-1}$. D'où, par (a) et passage à la limite quand $k \rightarrow +\infty$, $P(A) = 0$.
 - Soit $\omega \in \Omega$. On pose $I_\omega = \{k \in \mathbb{N} \mid \omega \in A_k\}$. On a alors les équivalences

$$\begin{aligned} \omega \in B &\iff I_\omega \text{ est infini} \\ &\iff I_\omega \text{ n'est pas majoré} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists k \geq n, \quad \omega \in A_k \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \omega \in \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \\ &\iff \omega \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right). \end{aligned}$$

Ainsi $B = A$, donc $P(B) = 0$.

3. On a $\overline{A} = \overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right)} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right)} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k} \right)$. Alors, par positivité et sous-additivité

$$0 \leq P(\overline{A}) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k} \right).$$

On va montrer que tous les termes de la série majorante sont nuls, donc que $P(\overline{A}) = 0$, i.e. que $P(A) = 1$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et posons $B_N = \bigcap_{k=n}^N \overline{A_k}$, pour $N \geq n$.

— La suite $(B_N)_{N \geq n}$ est décroissante pour l'inclusion, et pour tout $N \geq n$, on a $\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k} \subset B_N \subset \overline{A_N}$, d'où $\bigcap_{N=n}^{+\infty} B_N = \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}$. On en déduit par continuité décroissante que

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P(B_N).$$

— Par indépendance mutuelle des A_k (donc des $\overline{A_k}$), on a $P(B_N) = \prod_{k=n}^N P(\overline{A_k})$.

Montrer que $P(B_N)$ tend vers 0 revient à montrer que $\ln(P(B_N)) = \sum_{k=n}^N \ln(P(\overline{A_k}))$ tend vers $-\infty$, i.e. que la série $\sum_{k \geq n} \ln(P(\overline{A_k}))$ diverge, puisqu'elle est à termes négatifs. Or

$$\ln(P(\overline{A_k})) = \ln(1 - P(A_k)).$$

Si $P(A_k) \not\rightarrow 0$, alors la série $\sum \ln(P(\overline{A_k}))$ diverge grossièrement. Si $P(A_k) \rightarrow 0$, alors $\ln(P(\overline{A_k})) \sim -P(A_k)$, et donc la série (négative) $\sum \ln(P(\overline{A_k}))$ est de même nature que la série $\sum P(A_k)$, donc diverge par hypothèse.

La série $\sum_{k \geq n} \ln(P(\overline{A_k}))$ diverge donc bien dans tous les cas.

On a donc $P(B_N) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$, et ainsi $P(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}) = 0$, donc $P(\overline{A}) = 0$, et

$$P(A) = 1.$$

Rq. Ce résultat montre par exemple que dans une suite de lancers d'un dé à 6 faces équilibré, la séquence 1 - 2-3-4-5-6 (ou n'importe quelle autre séquence finie) se produit presque sûrement une infinité de fois.

Exercice 15 : X ENS

1. La condition sur $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est $\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n \geq 0$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} q_n = 1$, soit $\lambda = \frac{1}{\zeta(s)}$.
2. Par définition, Q_s admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} n q_n$ converge (absolument). Soit, par le critère de Riemann, si et seulement si $s > 2$.
3. Soit p_1, \dots, p_n des nombres premiers distincts. Alors $A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_n}$ est l'ensemble des entiers divisibles par p_1, \dots, p_n soit par le produit $p_1 \dots p_n$. Par conséquent,

$$Q_s\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_{p_i}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} Q_s(\{k p_1 \dots p_n\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda (k p_1 \dots p_n)^{-s} = (p_1 \dots p_n)^{-s} = \prod_{i=1}^n p_i^{-s} = \prod_{i=1}^n Q_s(A_{p_i}).$$

Les A_p , lorsque p parcourt l'ensemble des nombres premiers, forment donc une famille d'événements mutuellement indépendants.

4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$, on a $p_n^{-s} = Q_s(A_{p_n})$ donc $1 - p_n^{-s} = Q_s(\overline{A_{p_n}})$. Par indépendance mutuelle, il vient

$$\prod_{n=1}^N (1 - p_n^{-s}) = Q_s\left(\bigcap_{1 \leq n \leq N} \overline{A_{p_n}}\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} Q_s\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{A_{p_n}}\right)$$

par le théorème de continuité décroissante. Or $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{A_{p_n}}$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls qui ne sont divisibles par aucun nombre premier, soit le singleton $\{1\}$. On a donc $\prod_{n=1}^N (1 - p_n^{-s}) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} Q_s(\{1\}) = \lambda = \frac{1}{\zeta(s)}$, ou encore

$$\prod_{n=1}^N \left(\frac{1}{1 - p_n^{-s}}\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \zeta(s).$$

5. On rappelle que $\lim_{+\infty} \zeta = +\infty$. Soit $A > 0$. Par définition de la limite, il existe $\alpha > 1$ tel que $\forall s \in]1; \alpha[, \zeta(s) > A$.

On fixe alors $s \in]1; \alpha[$. D'après la question précédente, $\prod_{n=1}^N \frac{1}{1-p_n^{-s}} \rightarrow \zeta(s) > A$ quand $N \rightarrow +\infty$, donc il existe un entier N_0 tel que $\forall N \geq N_0, \prod_{n=1}^N \frac{1}{1-p_n^{-s}} > A$. Pour $N \geq N_0$, on a alors $\prod_{n=1}^N \frac{1}{1-1/p_n} > \prod_{n=1}^N \frac{1}{1-p_n^{-s}} > A$. Ceci prouve que $\prod_{n=1}^N \frac{1}{1-1/p_n} \rightarrow +\infty$ quand $N \rightarrow +\infty$, donc

$$\sum_{n=1}^N -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Autrement dit la série $\sum_{n \geq 1} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ diverge, et comme $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \sim \frac{1}{p_n}$, le critère d'équivalence des séries à termes positifs permet de conclure que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

Exercice 16 : ENS

Cet exercice un peu hors-programme redémontre le résultat suivant : si $(a_i)_{i \in I}$ est sommable, alors I est au plus dénombrable.

1. Les A_i étant incompatibles, si J est une partie finie de I $\sum_{i \in J} P(A_i) = P(\cup_{i \in J} A_i) \leq 1$ donc la

famille $(P(A_i))_{i \in I}$ est sommable .

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \{i \in I / P(A_i) > \frac{1}{n}\}$. B_n est fini car par incompatibilité

$$\sum_{i \in B_n} P(A_i) \leq 1 \text{ donc } \text{card } B_n \leq n.$$

On a $I = \{i \in I / P(A_i) > 0\} = \cup_{i=1}^{+\infty} B_i$ est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis.

2. Soit X une variable aléatoire discrète et $X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$ et I au plus dénombrable. Soit $i_0 \in I$ tel que $P(X = x_{i_0}) \neq 0$, alors $P(X = x_{i_0}) = P((X = x_{i_0}) \cap (X = x_{i_0})) = P(X = x_{i_0})^2$ donc $P(X = x_{i_0}) = 1$ et X est presque sûrement constante.