Préparation aux oraux : Analyse

Suites, séries

Exercice 1 : CCINP 2025 sans préparation Soit $(u_n)_n$ une suite de réels.

1. Montrer que $(u_n)_n$ a même nature que $\sum u_{n+1} - u_n$.
2. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k+n}} - n$. Montrer que $(u_n)_n$ converge.

Exercice 2 : MT 2025 Soit $(u_n)_n$ définie par : $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$.

1. Déterminer la limite de $(u_n)_n$.
2. Déterminer la limite de $(nu_n)_n$.
3. Etudier la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum nu_n$.

Exercice 3 : MT 2025 Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante et de limite nulle et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $v_n = n(u_n - u_{n+1})$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. Exprimer T_n en fonction de S_n et en déduire que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature et qu'elles ont même somme en cas de convergence.

Exercice 4 : MT 2025 Soit $(a_n)_n \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telle que $a_0 \neq 0$ et $a_1 \neq 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = -a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $P_n(u_n) = 0$.
2. Montrer que $(u_n)_n$ converge.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n + 1$. Quelle est la limite ℓ de $(u_n)_n$? Donner un équivalent de $u_n - \ell$.

Exercice 5 : CCINP Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k} = \dfrac{(\ln(n))^2}{2} + \alpha + o(1)$.

Exercice 6 : MP

1. Soit $\alpha > 1$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1} \sim \dfrac{n^\alpha}{\alpha}$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $p \geq 2$. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} P(k)$.

Exercice 7 : CCINP 2022

Soient $(u_n)_n \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$, $a > 0$, et pout tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $v_n = \dfrac{u_n}{S_n}$ et $w_n = \dfrac{u_n}{S_n^a}$.

1. Si $(u_n)_n$ est la suite constante égale à 1, déterminer la nature des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$.
2. On suppose que la série $\sum u_n$ converge.
   (a) Montrer que la suite $(S_n)_n$ converge vers une limite strictement positive.
   (b) Déterminer un équivalent de v_n et de w_n. En déduire la nature des séries $\sum v_n$, $\sum w_n$.
3. On suppose que la série $\sum u_n$ diverge.

(a) Supposons que la suite $(v_n)_n$ converge vers 0. Montrer que $\ln(S_n) - \ln(S_{n-1}) \sim v_n$.

(b) Montrer que la série $\sum v_n$ diverge.

(c) On suppose $a \leq 1$. Déterminer la nature de $\sum w_n$.

(d) On suppose ici $a > 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n \leq \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{t^a} dt$. En déduire la nature de la série $\sum w_n$.

Exercice 8 : MT sans préparation

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ en sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 9 : CCINP Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$.

1. Montrer que (a_n) est décroissante. Calculer a_0 et a_1.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$. En déduire que $a_n \sim a_{n+1}$.
3. Montrer que la suite de terme général $(n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1}$ est constante. En déduire un équivalent de a_n. Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?

Exercice 10 : CCINP

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto nx^3 + n^2 x - 2$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n possède une unique racine réelle que l'on note u_n.
2. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et la convergence de la série de terme général u_n^α selon les valeurs de α.

Exercice 11 : MP Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n!}{x^n} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{x}{k})$.

1. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente ; déterminer sa limite.
2. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln(1 + \frac{1}{n})$ converge.
3. En déduire un équivalent de u_n puis la nature de la série de terme général u_n en fonction de x.

Exercice 12 : MP Soient $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \cos(k\theta)$.

1. Montrer que (S_n) est bornée.
2. En remarquant que $S_n - S_{n-1} = \cos(n\theta)$, montrer que la série de terme général u_n converge.
3. En utilisant l'inégalité $|\cos x| \geqslant \cos^2 x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que la série de terme général $|u_n|$ diverge.

Fonctions, dérivées, intégration sur un segment

Exercice 13 : CCINP 2025 sans préparation Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $F(x) = \int_0^1 f'(xt) dt$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que la fonction $s \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 : CCINP Soit $f : x \mapsto x + \ln(1+x)$.

1. Montrer que f est une bijection de $]-1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que g, la bijection réciproque de f, est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$. Montrer que g admet un développement limité d'ordre 3 en 0 et le calculer.

Exercice 14 : CCINP Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et, si $f \in E$, $u(f) \colon x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x e^t f(x-t)dt$. Montrer que u est un endomorphisme de E. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 15 : Centrale Trouver les $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{4}\right).$$

Exercice 16 : ENSAM Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Pour $f \in \mathcal{C}$, on pose $g \colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x}\int_x^{x^3} f(t)dt$.

1. Montrer que g est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $g(x)$, de $f(x)$ et de $f(x^3)$.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0, et préciser par quelle valeur.
3. Soit Φ la fonction qui à f associe g. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}$. Cet endomorphisme est-il surjectif ?

Espaces vectoriels normés

Exercice 17 : Centrale 2025
Soit $f : M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{i,j} m_{i,j}$ et $||.|| : M = (m_{i,j}) \mapsto \max_{i,j} |m_{i,j}|$.

1. Montrer que f est linéaire et continue.
2. Montrer que $\forall M \in O_n(\mathbb{R})$, $||M|| \leq 1$.
3. Montrer qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$, $f(M) \leq f(A)$ .On pourra utiliser $\Phi : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto AA^T - I_n$.

Exercice 17 : MT 2023
Soit $M : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$, $t \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{-t} & (t-1)^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $||.||_\infty : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A = (a_{ij}) \mapsto \sup_{i,j} |a_{ij}|$ est une norme sur $M_2(\mathbb{R})$.
2. Soit $\Phi : \mathbb{R} \to, \mathbb{R}^+ t \mapsto ||M(t)||_\infty$. Exprimer $\Phi(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^+$. ϕ est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 18 : MT
Soient $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On suppose que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont de modules strictement plus petits que 1. On définit une suite de vecteurs colonnes par la donnée d'une colonne X_0 et la relation de récurrence $X_{p+1} = AX_p + B$.

1. Montrer que $A - I_n$ est inversible. En déduire qu'il existe un unique vecteur colonne S tel que $S = AS + B$.
2. Montrer que, pour tout p, $X_p = S + A^p(X_0 - S)$. Étudier la convergence de (X_p).

Exercice 19 : IMT
Soit ℓ^∞ le sous-espace de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ formé des suites bornées. On munit ℓ^∞ de la norme infinie $\|\ \|_\infty$: $(u_n)_n \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$. Si $u = (u_n) \in \ell^\infty$, on note $\Delta(u)$ la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$. Montrer que Δ est un endomorphisme continu de ℓ^∞.

Calculer $\|\!|\Delta|\!\|$ où $\|\!|\Delta|\!\| = \sup\{||\Delta(u); u \in \ell^\infty ||u|| = 1\}$.

Exercice 20 : CCINP
On munit $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme $\|\quad\|$ définie par : $\forall M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in E, \|M\| = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{i,j}|$.

1. Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que les applications $M \mapsto MX$ et $M \mapsto P^{-1}MP$ sont continues.
2. Montrer que l'application $(M, N) \mapsto MN$ est continue.

3. Soit $A \in E$. On suppose que la suite $(\|A^n\|)_{n\geqslant 1}$ est bornée. Montrer que les valeurs propres de A sont de module $\leqslant 1$.

Exercice 21 : Centrale

Soit E l'ensemble des $(x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général x_n^2 converge.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que l'application qui à $(x_n) \in E$ associe $\|(x_n)\| = (\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2)^{1/2}$ définit une norme.
3. Soit $F\colon (x_n) \in E \mapsto x_0 \in \mathbb{R}$. L'application F est-elle continue ?
4. Si $(x_n) \in E$, montrer que la suite de terme général $x_n + x_{n+1}$ est dans E. L'application $G\colon (x_n)_{n\geqslant 0} \in E \mapsto (x_n + x_{n+1})_{n\geqslant 0} \in E$ est-elle continue ?

Exercice 22 : Centrale

On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme donnée par $\forall f \in E$, $\|f\|_2 = (\int_0^1 f^2)^{1/2}$. Soit $\Phi\colon f \in E \mapsto \int_0^1 |f|$. Montrer que Φ est une application continue de $(E, \|\ \ \|_2)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 23 : MP

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose $N(u) = \sup\{\|u(x)\|,\ x \in E \text{ et } \|x\| = 1\}$.

1. Montrer que N définit une norme sur $\mathcal{L}(E)$.
2. Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$. Comparer $N(v \circ u)$ à $N(u)N(v)$.
3. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \inf\{\langle x, u(x)\rangle,\ x \in E \text{ et } \|x\| = 1\} > 0$.

Suites et séries de fonctions

Exercice 24 : CCINP 2024

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$: $u_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2\ln(1+n)}$.

1. Déterminer le domaine de convergence D de la série $\sum u_n(x)$. On note pour tout $x \in D$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que S est continue.
3. Montrer que la série $\sum u_n'$ converge uniformément. On pourra utiliser une comparaison série intégrale.
4. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 25 : CCINP 2024

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ $I_n = \displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{1}{t}} t^n dt$.

1. Définition et signe de I_n.
2. Variations de $(I_n)_n$.
3. (a) Limite de $(I_n)_n$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n + I_{n-1} = e^{-1}$
   (c) Montrer que $I_n \sim \dfrac{e^{-1}}{n}$.
4. Déterminer la nature de $\sum I_n$ et $\sum (-1)^n I_n$.
5. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum I_n x^n$? On notera g sa somme.
6. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in]-R, R[$ et $t \in [0,1]$: $g_n(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} t^n x^n \text{ si } t \neq 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$ Etudier la convergence normale de $\sum g_n$.
7. Donner une expression intégrale de $g(x)$.

<u>Exercice</u> 26 : CCINP 2024

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

1. Montrer que $(a_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $\sum(-1)^n a_n$ converge.
3. On considère la série entière $\sum a_n x^n$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq \frac{1}{2n+1}$.
   (b) En déduire le rayon de convergence R de la série entière. On note g sa somme.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n$.
4. Montrer que g est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

<u>Exercice</u> 27 : CCINP 2022 sans préparation

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n!}$.

1. Etudier la convergence simple, uniforme, normale de $\sum u_n$.
2. Montrer que sa somme est de classe C^∞.

<u>Exercice</u> 28 : ENSEA 2024

Soit pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n}$.

1. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f que l'on précisera.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\cos(nx)}{n} dx$.

<u>Exercice</u> 29 : MT 2024

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+\frac{1}{2})^n}}{\sqrt{x}} dx$.

<u>Exercice</u> 30 : ENSEA 2021 : sans préparation

On considère la série de fonctions : $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

1. Etudier sa convergence simple puis sa convergence uniforme.
2. Calculer sa somme.

<u>Exercice</u> 31 : CCINP 2021

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \geq 0$, $u_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)}$.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, la série $\sum u_n(x)$ converge.
2. On note $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
   (a) Etudier la convergence normale de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Soit $a > 0$. Etudier la convergence normale de de $\sum u_n$ sur $[a, +\infty[$.
3. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geq 0$: $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(x) - R_{2n}(x) \geq \dfrac{\sqrt{n}x}{\sqrt{2}(1+2nx^2)}$.
   (b) En déduire que $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

4. On admet que pour tout $x > 0$:

$$(*)\ \ 2\arctan(\frac{1}{x}) \leq f(x) \leq 2\arctan(\frac{1}{x}) + \frac{x}{1+x^2}$$

Déterminer la limite de f en 0. La fonction f est-elle continue ?

5. Montrer $(*)$.

Exercice 32 : CCINP
Soient $a \in]-1,1[$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x)$. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 33 : CCINP
Justifier l'existence de $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$ et de $I = \int_0^1 x^x dx$. Montrer que $I = S$.

Exercice 34 : CCINP

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+x}$.

1. Déterminer suivant les valeurs de a le domaine de définition de S.
2. Soit a tel que $|a| < 1$.
   (a) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Déterminer une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$.
   (c) Déterminer un équivalent de S en 0^+.
   (d) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 35 : MT Soit $u_n(t) = (-1)^n \frac{t^n}{\sqrt{1+n^2}}$.

1. Domaine de définition de $f\colon t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$.
2. Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de $[0,1[$.
3. Équivalent de $v_n = \int_0^1 |u_n|$.
4. Nature de $\sum v_n$.
5. Écrire $\int_0^1 f$ comme somme d'une série numérique.

Exercice 36 : MT Soit $f\colon x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Exercice 37 : MP 2024
Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 e^{i\theta} \frac{1-(te^{i\theta})^n}{1-te^{i\theta}} dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k}$.
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_k \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-te^{i\theta}} dt$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum \frac{\cos(k\theta)}{k}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = -\frac{1}{2}\ln(2-2\cos(\theta))$.
4. Montrer que pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\displaystyle\sum \frac{\sin(k\theta)}{k}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{1}{2}(\pi - \theta)$.

<u>Exercice</u> 38 : X Soit $f\colon x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Trouver une équation différentielle vérifiée par f.

<u>Exercice</u> 39 : Centrale Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n\colon x \mapsto \frac{(-1)^n f(x)}{\sqrt{1+n^2 f(x)^2}}$.

1. Justifier l'existence de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. La convergence est-elle uniforme ?
2. Montrer que si f est continue, S l'est aussi. Réciproque ?

<u>Exercice</u> 40 : MP Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(x+n)}$.

1. Justifier l'existence de f.
2. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.
3. Trouver un polynôme P tel que $f(x) - \frac{P(x)}{x^2} = o(\frac{1}{x^2})$ lorsque x tend vers $+\infty$.

<u>Exercice</u> 41 : Centrale Soit $f\colon x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et étudier la continuité de f sur D_f.
2. La série définissant f est-elle uniformément convergente sur D_f ?
3. Existe-t-il une fonction polynomiale qui coïncide avec f sur un intervalle non vide et non réduit à un point de D_f ?
4. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ et quand x tend vers $+\infty$.

<u>Exercice</u> 42 : MP 2025 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]-1,1[$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{1-x^n}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Montrer que f est bien définie et de classe C^1 sur $]-1,1[$.
2. On pose pour tout $x \in [0,1[$ $v_n(x) = (1-x)u_n(x)$. Montrer que $\sum v_n$ converge uniformément sur $[0,1[$.
3. En déduire un équivalent de f en -1.

<u>Intégrales généralisées, intégrales à paramètres</u>

<u>Exercice</u> 43 : MT 2025
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

1. Montrer que f est bien définie pour tout $x > 0$.
2. Montrer que $f(x) \sim -\ln(x)$. (indication : mq $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2} - \dfrac{1}{t}$ est intégrable sur $]0,1]$)
3. Montrer que $f(x) = O\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$.

<u>Exercice</u> 44 : CCINP 2025
Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3} dx$.

1. Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{n^{\frac{5}{3}}} J_n$ avec $J_n = \int_0^{+\infty} n^{\frac{1}{3}} \dfrac{\sin(n^{-\frac{1}{3}}t)}{1+t^3} dt$.
3. Montrer que $J_n \to K$ avec $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt$.

4. Montrer que $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt$.
5. En déduire que $2K = \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3} dt$ puis que $2K = 4\sqrt{3}\dfrac{\pi}{9}$.
6. En déduire un équivalent de I_n puis la nature de la série $\sum I_n$.

Exercice 45 : CCINP 2025

On note $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ et $\Psi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que Ψ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que Ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Déterminer $\Psi(0)$ et la limite de Ψ en $+\infty$.
4. Montrer que : $\forall x > 0,\ \Psi'(x) = -A\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$.
5. Montrer que $\int_0^{+\infty} \Psi'(x)dx = -2A^2$ et déterminer A.

Exercice 45 : MT 2023 sans préparation

Soient a, $b > 0$. Déterminer la limite quand $x \to 0$ de $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{\cos(t)}{t} dt$.

Exercice 46 : CCINP 2023

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)} dt$.

1. Montrer la convergence de l'intégrale.
2. Montrer que pour tout $t > 0$, $2e^{-t}\sin(t)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt} = \frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)}$.
3. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2+1}$
4. Montrer que : $\dfrac{\pi}{4} \leq I \leq \dfrac{\pi}{4} + 1$.

Exercice 47 : CCINP sans préparation 2022

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$. Déterminer le domaine de définition D de f, puis montrer que f est continue sur D. Etudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 48 : CCINP 2021

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer $f(\dfrac{1}{2})$ à l'aide du changement de variables $t = u^2$.

Exercice 49 : CCINP 2021

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$ converge.
2. On pose pour tout $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.
   (a) Montrer que F est à valeurs positives et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

3. Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$. Exprimer $F(x) - F'(x)$ en fonction de x, en déduire que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. En déduire $\lim_{x \to 0^+} F(x)$.
5. Trouver un équivalent de $F(x)$ en 0^+.

<u>Exercice</u> 50 : CCINP Soient $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ et $f\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t^2} dt$.

1. Établir la convergence de (I_n).
2. Exprimer I_{2n} en fonction de I_{2n-2}. Montrer que $I_{2n} = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1} n!}$.
3. Donner le domaine de définition de f. Donner le développement en série entière du cosinus ; en déduire une expression de $f(x)$.

<u>Exercice</u> 51 : MT Soit $f\colon y \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ty} \sin t}{t} dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(y)$ pour $y \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. En déduire une expression de f.

<u>Exercice</u> 52 : IMT
Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \ln(\frac{x}{1-e^{-x}}) \frac{e^{ax}}{x} dx$ pour $a \in \mathbb{R}$.

<u>Exercice</u> 53 : CCINP Soit, pour $n \geqslant 1$: $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)^n}$.

1. Démontrer l'existence de I_n et trouver sa limite quand $n \to \infty$.
2. En posant $u = \frac{1}{x}$, montrer que $I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4} du$. Puis, en posant $v = u - \frac{1}{u}$, calculer I_1.
3. Calculer I_n.

<u>Exercice</u> 54 : MP
Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt$ et $v_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$.

1. Justifier l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.
2. Montrer que la suite (v_n) est constante.
3. Montrer que $|u_n - v_n| \to 0$.
4. En déduire la valeur de I.

<u>Exercice</u> 55 : Centrale
Soient $f\colon x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(1+t^2)^2} dt$ et $g\colon x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Trouver une équation différentielle vérifiée par g. En déduire g puis f.

<u>Exercice</u> 56 : Centrale
Soit s un nombre complexe de partie réelle > 0.

1. Montrer que $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$ converge.
2. Montrer que $I_n(s) = \int_0^n t^{s-1} (1 - \frac{t}{n})^n dt$ converge. Quelle est la limite de $I_n(s)$ lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n!\, n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)} = \Gamma(s)$.

<u>Exercice</u> 57 : Centrale
Soit $\alpha > 1$ et $f\colon x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+x^2)^\alpha}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
3. Étudier l'intégrabilité de f sur son domaine de définition.

<u>Exercice</u> 58 : MP 2025 Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$.

1. Déterminer un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.
2. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{e^t - 1} dt$. Montrer que I_n est bien définie. Trouver un équivalent de I_n en $+\infty$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

<u>Séries entières</u>

<u>Exercice</u> 59 : Centrale 2025 Soit $\theta \in]0, \pi[$, et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta) x^n$.

1. Montrer par l'absurde que $\sin(n\theta)$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$.
2. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum \sin(n\theta) x^n$ en justifiant.
3. Déterminer la limite en 1^- de f.
4. Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^+$ telle que $\sum a_n$ diverge et $R(\sum a_n x^n) = 1$. Montrer que $\lim_{x\to 1} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = +\infty$.

<u>Exercice</u> 60 : MP 2025 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est de classe C^∞.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer le DL à l'ordre 5 en 0 de f^{-1}.

<u>Exercice</u> 61 : MP 2025

$u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. On admet le théorème de Césaro.

1. Equivalent de u_n en $+\infty$. Rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$.
2. Pour $x \in]-R, R[$, calcul de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

<u>Exercice</u> 62 : CCINP 2021

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^n dt$. Soit $\displaystyle\sum_n I_n x^n$ la série entière de rayon de convergence R.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{\pi}{4}$ et que $R \geq 1$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.
3. En utilisant 2.b. et la monotonie de $(I_n)_n$, déterminer un équivalent de I_n, puis déterminer R.
4. Nature des séries $\displaystyle\sum_n I_n$ et $\displaystyle\sum_n (-1)^n I_n$.

Exercice 63 : CCINP Rayon de convergence et somme de la série entière de terme général $\frac{\cos(2n\pi/3)}{n}x^n$.

Exercice 64 : CCINP Rayon de convergence et somme de $f\colon x\mapsto \sum_{n\geqslant 1}^{+\infty}\frac{3n}{n+2}x^n$.

Exercice 65 : Centrale

1. Calculer, pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$: $I_{p,q}=\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.
2. Rayon de convergence et somme de $x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}x^n$.

Exercice 66 : Centrale

1. Donner le développement en série entière de $f(x)=(1+x)^{-1/2}$ et préciser son rayon de convergence.
2. Donner le rayon de convergence, puis une expression simple de la somme de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n)!}$.

Exercice 67 : IMT
Convergence et somme de la série de terme général $u_n=\frac{1}{n(2n-1)2^n}$.

Exercice 68 : Centrale
On pose $u_n=\ln(\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}})$ pour $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général u_nx^n.
2. Étudier la série aux bornes de l'intervalle de convergence.

Equations différentielles, calcul différentiel

Exercice 69 : CCP Soit l'équation (E) : $y'-y=e^{-x^2}$.

1. Exprimer les solutions de (E) en fonction de u.
2. Montrer que $t\mapsto e^{-t^2-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En déduire que u possède des limites finies quand x tend vers $\pm\infty$.
3. Montrer que les solutions de (E) ont toutes pour limite zéro quand x tend vers $-\infty$.
4. Montrer qu'il existe une solution de (E) qui a pour limite zéro quand x tend vers $+\infty$.
5. Que dire des solutions de (F) : $y'+y=e^{-x^2}$?

Exercice 70 : CCINP Intégrer l'équation différentielle $x^2f'(x)+f(x)=1$. Trouver une solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 71 : Centrale

1. Déterminer une solution développable en série entière au voisinage de 0 et non nulle de (*) : $(x^2-1)y''+3xy'+y=0$.
2. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $W_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n\theta d\theta$. Exprimer W_{n+2} en fonction de W_n et de n.
3. En déduire une expression d'une solution de (*) sur $]-1,1[$.

Exercice 72 : CCINP Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^4}{x^2+y^2-xy} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha \text{ si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. Prouver que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2+y^2-xy\geq\frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Quel est le domaine de définition de f ?

(b) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Dans cette question on suppose que $\alpha = 0$.

i. Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$.

ii. Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et les calculer.

iii. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 73 : CCINP Déterminer les extrema de $f\colon (x,y) \mapsto (x^2-1)^2 + (x^2 - e^y)^2$.

Exercice 74 : CCINP Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto e^{x\sin(y)}$. Etudier les extrema de f.

Exercice 75 : Centrale Soit $f\colon (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \mapsto y(x^2 + \ln^2 y)$. Déterminer les extrema de f et préciser leur nature globale ou locale.

Exercice 76 : Centrale
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On suppose que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \|x-y\|^2$. Montrer que f est constante.

Exercice 77 : Centrale Soient $h : (u,v) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \to (\frac{u^2+v^2}{2}, v)$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x > y^2\}$.
On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(E) : (2x - y^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 16\varphi = 0.$$

a) Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ sur D.
b) Montrer que h et h^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^2$.
c) Résoudre (E) sur D en effectuant le changement de variable $(x,y) = h(u,v)$.

Exercice 78 : Centrale Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F\colon (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0, \dots, 0)\} \mapsto f(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2})$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\Delta F = 0$.

Exercice 79 : Centrale Déterminer l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.
On pourra poser $u = ax + y$ et $v = bx + y$ avec a et b bien choisis.

Exercice 80 : CCINP Soit (S) la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $xyz = 1$.

1. Déterminer l'équation du plan tangent à (S) au point M_0.
2. On note (P) ce plan tangent. Déterminer la distance de O à (P).

Exercice 81 : Centrale Soit (S) la surface d'équation $x(x-1)(x+1) + (x+1)y^2 + (x-1)z^2 = 0$.

1. Déterminer, suivant $a \in \mathbb{R}$, la nature de l'intersection de (S) et du plan d'équation $x = a$.
2. Déterminer l'ensemble des droites incluses dans (S).
3. Montrer que tous les points de (S) sont réguliers.

Exercice 82 : MP 2024
Soit $(E) : (1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0$. Montrer que y est solution sur $]-1,1[$ de (E) si et seulement si $z : \theta \mapsto \sin(\theta) y(\cos(\theta))$ est solution sur $]0,\pi[$ d'une équation à déterminer puis en déduire l'ensemble des solutions de (E).