

Préparation aux oraux : Analyse : CORRIGES

Suites, séries

Exercice 1 : CCINP 2025 sans préparation

1. cours

2. On trouve avec un DL que $u_{n+1} - u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum u_n$ converge donc la suite $(u_n)_n$ converge.

Exercice 2 : MT 2025

1. Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ donc par théorème d'encadrement, $u_n \rightarrow 0$.
2. On a donc $(n+1)u_{n+1} = e^{-u_n} \rightarrow 1$ donc $nu_n \rightarrow 1$ et $u_n \sim \frac{1}{n}$.
3. Par comparaison pour des SATP, la série $\sum u_n$ diverge et la série $\sum nu_n$ diverge grossièrement.

Exercice 3 : MT 2025 Avec les hypothèses, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ et une série à termes positifs converge ssi sa somme partielle est majorée. Par un calcul (changement d'indice) $T_n = S_n - nu_{n+1}$. On a donc $T_n \leq S_n$.

Si $\sum u_n$ converge alors $(S_n)_n$ est majorée donc $(T_n)_n$ aussi donc $\sum v_n$ converge. Donc la suite $(S_n - T_n)$ converge donc $(nu_n)_n$ converge, si sa limite ℓ est non nulle, $u_n \sim \frac{\ell}{n}$ donc la série $\sum u_n$ diverge c'est absurde, donc $\ell = 0$ et $nu_n \rightarrow 0$, ce qui donne la même limite pour (S_n) et (T_n) .

Supposons $\sum v_n$ converge. Alors le reste de cette série tend vers 0 ce qui donne : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k(u_k - u_{k+1}) \rightarrow$

0. Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k(u_k - u_{k+1}) \geq (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = (n+1)u_{n+1} \geq 0$ car $u_n \rightarrow 0$, donc $nu_n \rightarrow 0$

donc $nu_{n+1} \rightarrow 0$ et comme $T_n = S_n - nu_{n+1}$, $(S_n)_n$ converge vers la somme de la série $\sum v_n$.

Exercice 4 : MT 2025

1. P_n est continue et strictement croissante (dérivable et sa dérivée est positive car les a_i sont positifs) donc par théorème du cours définit une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $]a_0, +\infty[$ donc il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $P_n(u_n) = 0$.
2. $(u_n)_n$ est minorée et on a $P_{n+1}(u_n) = P_n(u_n) + a_{n+1}u_n^{n+1} = a_{n+1}u_n^{n+1} \geq 0 = P_{n+1}(u_{n+1})$ donc la suite $(u_n)_n$ est décroissante, donc elle converge par théorème de la limite monotone.
3. Soit $\ell \in \mathbb{R}^+$ la limite. On peut préciser que $P_n(1) > 0$ donc $u_n \in]0, 1[$ donc $\ell \in [0, 1]$. On peut également calculer P_2 ce qui donne $u_2 = \frac{1}{2}$ donc par décroissance, $u_n \leq a = \frac{1}{2}$.

Le cours sur les séries entières donne la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum (n+1)x^n$ sur $[0, a]$ et on a sur $[0, a]$, $\sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)x^k - 1 = \frac{1}{(1-x)^2} - 1 = f(x)$ donc $|f(u_n)| \leq |P_n(u_n) - f(u_n)| \leq \|P_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ donc on a $f(u_n) \rightarrow 0$. Or par continuité de f , $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$ donc par unicité de la limite, $f(\ell) = 0$ ce qui donne $\ell = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

On peut montrer que $u_n - \ell \sim \frac{n}{4}\ell^{n+1}$.

Exercice 4 : CCINP On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{(\ln(n))^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \int_{k-1}^k \frac{\ln(t)}{t} dt$.

Il suffit de montrer que la suite $(u_n)_n$ converge cad que la série de TG $u_{n+1} - u_n$ converge, ce qu'on obtient à l'aide d'un développement asymptotique ($\sim \frac{\ln(n)}{n^2}$).

Exercice 5 : MP

On utilise une comparaison série intégrale à la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{1-a}}$ qui est continue décroissante à valeurs positives sur $[1, +\infty[$ pour obtenir l'équivalent du 1. Puis si $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$, $\sum_{k=1}^n P(k) = \sum_{j=0}^p a_j \sum_{k=1}^n k^j$

et d'après 1. $\sum_{k=1}^n k^j \sim \frac{n^{j+1}}{j+1}$ donc $\sum_{k=1}^n P(k) \sim a_p \frac{n^{p+1}}{p+1}$.

Exercice 6 : CCINP 2022

1. La série $\sum u_n$ diverge grossièrement ($S_n = n + 1 \rightarrow +\infty$), donc $v_n \sim \frac{1}{n}$ et $\sum v_n$ diverge par critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs puisque la série harmonique diverge, et de même comme $w_n \sim \frac{1}{n^a}$, $\sum w_n$ converge ssi $a > 1$ d'après le critère de Riemann.

2. La série $\sum u_n$ converge.

(a) Comme $(S_n)_n$ est une suite croissante (puisque c'est la somme partielle d'une série à termes positifs), et que la série converge, d'après le théorème de la limite monotone, $(S_n)_n$ converge, sa limite ℓ est strictement positive car $(S_n)_n$ est croissante et à valeurs strictement positives.

(b) On a donc $v_n \sim \frac{u_n}{\ell}$ et $w_n \sim \frac{u_n}{\ell^a}$ donc par critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent également.

3. La série $\sum u_n$ diverge donc $S_n \rightarrow +\infty$ d'après le théorème de la limite monotone.

(a) On a $\ln(S_n) - \ln(S_{n-1}) = \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{S_n}{S_n - u_n}\right) = -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) = -\ln(1 - v_n) \sim v_n$.

(b) Supposons que $(v_n)_n$ converge vers 0. D'après ci-dessus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum_{k=1}^n v_k =$

$\sum_{k=1}^n \ln(S_k) - \ln(S_{k-1}) = \ln(S_n) - \ln(S_0) \sim \ln(S_n) \rightarrow +\infty$ donc la série $\sum v_n$ diverge. Si

maintenant $(v_n)_n$ ne converge pas vers 0, la série $\sum v_n$ diverge grossièrement donc dans tous les cas, $\sum v_n$ diverge.

(c) On suppose $a \leq 1$. Alors $S_n \geq S_n^a$ et $u_n > 0$ donc $w_n \geq v_n$ donc par critère de minoration pour les séries à termes positifs d'après b., la série $\sum w_n$ diverge également.

(d) On suppose $a > 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^a}$ est décroissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{u_n}{S_n^a} =$

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^a} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{S_n^a} dt \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{t^a} dt.$$

La série $\sum w_n$ est à termes positifs, il suffit de montrer que sa somme partielle est majorée pour montrer qu'elle converge. Or par sommation et d'après la relation de Chasles,

$$\sum_{k=1}^n w_k \leq \int_{S_0}^{S_n} \frac{1}{t^a} dt = \frac{S_0^{1-a} - S_n^{1-a}}{a-1} \leq \frac{S_0^{1-a}}{a-1}. \text{ La somme partielle est donc majorée donc la série converge.}$$

Exercice 7 : MT 2022

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

On remarque d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2}{n(n+1)^2}$ puis que $\frac{2}{n(n+1)^2} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{(n+1)^2}$, on somme ensuite ces égalités et on obtient notamment par télescopage :

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} - 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + 2(T_{n+1} - 1)$$

puis on fait $n \rightarrow +\infty$ ce qui donne compte tenu du fait que $T_n \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$: $S_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{3} - 3$.

Exercice 8 : CCINP On pose $f_n : t \in [0, 1] \mapsto t^n \sqrt{1-t^2}$.

- Comme $\forall t \in [0, 1]$, $f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$, la propriété de croissance de l'intégrale montre que $a_{n+1} \leq a_n$. On calcule aisément (la première intégrale est l'aire d'un quart du disque de centre l'origine et de rayon 1, et pour la deuxième, on remarque que $f_1(t) = -\frac{1}{2}u'(t)u(t)^{1/2}$, avec $u(t) = 1 - t^2$) :

$$a_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{4}$$

$$a_1 = \int_0^1 t \sqrt{1-t^2} dt = \left[-\frac{(1-t^2)^{3/2}}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

- On intègre par parties, en dérivant t^{n+1} et en intégrant $t\sqrt{1-t^2}$, puis en écrivant que $(1-t^2)^{3/2} = (1-t^2)\sqrt{1-t^2}$ et en distribuant le produit sur le facteur $1-t^2$:

$$a_{n+2} = \int_0^1 t^{n+2} \sqrt{1-t^2} dt = \left[-\frac{(1-t^2)^{3/2}}{3} t^{n+1} \right]_0^1 + \frac{n+1}{3} \int_0^1 t^n (1-t^2)^{3/2} dt$$

$$= \frac{n+1}{3} \left(\int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt - \int_0^1 t^{n+2} \sqrt{1-t^2} dt \right) = \frac{n+1}{3} (a_n - a_{n+2}).$$

On en déduit immédiatement que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$.

La décroissance de (a_n) montre que $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n \leq a_{n+1} \leq a_n$. En divisant cet encadrement par le nombre strictement positif a_n , on obtient $\frac{n+1}{n+4} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$, et par passage à la limite quand n tend vers l'infini,

$$a_n \sim a_{n+1}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1}$. D'après la question précédente,

$$u_{n+1} = (n+2)(n+3)(n+4) \frac{n+1}{n+4} a_n a_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+3) a_n a_{n+1} = u_n,$$

ce qui prouve que (u_n) est constante. La valeur de la constante est obtenue en calculant $u_0 = 6a_0 a_1 = \frac{\pi}{2}$. Comme $a_n \sim a_{n+1}$, on a $u_n \sim n^3 a_n^2$, et on en déduit que

$$a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Il en résulte que la série de terme général a_n est convergente.

Exercice 9 : CCINP

- f_n est une fonction continue, strictement croissante ; $f_n(0) = -2$ et $f_n(1) = n(n+1) - 2 \geq 0$ si $n \geq 1$. Donc, il existe un unique $u_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

2. On a en fait $f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^5} - 1 < 0$ et $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} + n - 2 > 0$ si $n \geq 2$. Donc, pour $n \geq 2$, $\frac{1}{n^2} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Ce qui donne $\lim u_n = 0$.

Par ailleurs, on a $nu_n(u_n^2 + n) = 2$; donc, comme $u_n \neq 0$, $\frac{2}{nu_n} = u_n^2 + n \sim n$. Donc, $u_n \sim \frac{2}{n^2}$.

On en déduit que $\sum u_n^\alpha$ converge $\iff \alpha > \frac{1}{2}$.

Exercice 10 : MP

1. On a $\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln\left(\frac{n+1}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\right)$. Or

$$\frac{n+1}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) = \frac{n+1}{x} \left(\frac{x}{n+1} - \frac{x^2}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \right) = 1 - \frac{x}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

d'où

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x}{2(n+1)}.$$

Cet équivalent entre termes de signe fixe prouve que la série de terme général (négatif) $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ diverge.

Plus précisément, la suite de ses sommes partielles tend vers $-\infty$. Par télescopage, il en va de même de la suite $(\ln u_n)$ donc, par composition de limites,

$$\lim u_n = 0.$$

2. On peut préciser le développement limité ci-dessus en le réécrivant

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n = -\frac{x}{2(n+1)} + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = -\frac{x}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'où

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{\alpha + x/2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série proposée converge si et seulement si $\alpha = -\frac{x}{2}$.

3. La suite des sommes partielles de rang $n-1$ de cette série est $\ln u_n - \alpha \ln n$, qui tend donc, pour $\alpha = -\frac{x}{2}$, vers une limite finie K . Alors, par continuité de l'exponentielle, $\frac{u_n}{n^\alpha}$ tend vers e^K , d'où

$$u_n \sim e^K n^\alpha = \frac{e^K}{n^{x/2}}.$$

La série $\sum u_n$ converge donc ssi $x > 2$.

Exercice 11 : MP

1. On a $S_n = \operatorname{Re}(\sum_{k=0}^n e^{ik\theta})$ et

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{in\theta/2} \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

Donc $S_n = \cos(n\theta/2) \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$. On en déduit que $|S_n| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$ et (S_n) est bornée.

2. On écrit (transformation d'Abel)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{S_p}{p+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - S_0 + \frac{S_n}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)} - S_0 + \frac{S_n}{n}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que la suite (S_n) est bornée, on trouve que le membre de droite converge et donc la série de terme général u_n converge.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant l'inégalité de l'énoncé et $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$, on a

$$\sum_{k=1}^n |u_k| \geq \sum_{k=1}^n \frac{1 + \cos(2k\theta)}{2k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^n \frac{\cos(2k\theta)}{2k}.$$

Comme $2\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\sum \frac{\cos(2k\theta)}{2k}$ converge mais la série $\sum \frac{1}{2k}$ diverge et donc la série $\sum |u_k|$ aussi.

Fonctions, dérivées, intégration sur un segment

Exercice 12 : CCINP 2025 sans préparation

- La fonction F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec le théorème de continuité sous le signe intégrale :
 - $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto f'(xt)$ est intégrable car continue sur $[0, 1]$;
 - $\forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto f'(xt)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$;
 - Soit $a > 0$. On dispose de la domination locale suivante pour tout $k \in \mathbb{N} : \forall t \in [0, 1], \forall x \in [-a, a], |f^{(k+1)}(xt)| \leq \|f^{(k+1)}\|_{\infty}^{[-a, a]}$, la dernière fonction étant constante donc intégrable sur $[0, 1]$.

On en déduit que F est C^∞ sur $[-a, a]$ pour tout $a > 0$ donc sur $\mathbb{R}$.

- La fonction h de l'énoncé est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = f'(0)$.
Pour $x \neq 0$, on effectue le changement de variable affine $u = xt$:

$$h(x) := \int_0^1 f'(xt) dt = \frac{1}{x} \int_0^x f'(u) du = g(x).$$

et $F(0) = h(0)$ donc F et h coïncident sur $\mathbb{R}$ donc h est bien prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 : CCINP

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement croissante sur $] -1, +\infty[$ à valeurs sur $\mathbb{R}$. Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, +\infty[$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $f' : x \mapsto \frac{2+x}{1+x}$ ne s'annule pas sur $] -1, +\infty[$, la fonction g est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. À partir de la formule donnant g' , on montre par récurrence que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- On obtient $g(0) = 0$ et $g'(0) = \frac{1}{f' \circ g(0)} = \frac{1}{2}$.

D'après les formules de Taylor, g admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la forme $g(x) = \frac{1}{2}x + ax^2 + bx^3 + o(x^3)$. Comme $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, on en déduit que

$$g \circ f(x) = x + \left(-\frac{1}{4} + 4a\right)x^2 + \left(8b + \frac{1}{6} - 2a\right)x^3 + o(x^3) = x.$$

Par unicité du développement limité, on obtient : $a = \frac{1}{16}$ et $b = -\frac{1}{48}$.

Exercice 14 : CCINP Endomorphisme. L'application u est linéaire par linéarité de l'intégrale. Pour toute $f \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u(f)(x) = \int_0^x e^t f(x-t) dt = \int_0^x e^{x-u} f(u) du$ par le changement de variable $u = x - t$, donc $u(f)(x) = e^x \int_0^x e^{-u} f(u) du$, donc $u(f)$ est continue par produit de fonctions continues.

Éléments propres. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre et $f \in E$ un vecteur propre associé : $u(f)(x) = e^x \int_0^x e^{-u} f(u) du = \lambda f(x)$. Ceci est dérivable sur $\mathbb{R} : e^x \int_0^x e^{-u} f(u) du + f(x) = \lambda f'(x)$ donc $\lambda f(x) + f(x) = \lambda f'(x)$. La fonction f est donc une solution de l'équation différentielle

$$\lambda y' = (1 + \lambda)y.$$

Il existe donc $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A \exp(\frac{1+\lambda}{\lambda}x)$ si $\lambda \neq 0$. Si $\lambda = 0$, la fonction nulle est la seule solution, et ce n'est pas un vecteur propre. On conclut que

$$\text{Sp}(u) = \mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad \forall \lambda \neq 0, \quad E_\lambda(u) = \text{Vect} \left(x \mapsto \exp \left(\frac{1+\lambda}{\lambda} x \right) \right).$$

Exercice 15 : Centrale Analyse. Une récurrence immédiate dont la formule ci-dessus est l'initialisation montre que

$$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*, \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x^2}{4^k}\right).$$

Comme f est continue, elle est continue en zéro en particulier, donc $f(\frac{x}{2^n})$ tend vers $f(0)$ quand n tend vers $+\infty$. Par ailleurs, l'équivalent $\ln(1 + \frac{x^2}{4^k}) \sim \frac{x^2}{4^k}$ entre termes positifs montre que la série de terme général $\ln(1 + \frac{x^2}{4^k})$ converge. On en déduit que $f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{x^2}{4^k})$.

Synthèse. On vérifie que les fonctions suivantes conviennent :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = c + \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{4^k}\right).$$

Chaque fonction $u_k: x \in \mathbb{R} \mapsto \ln(1 + \frac{x^2}{4^k})$ est continue, et pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, on a manifestement $\|u_k\|_{\infty, [-a, a]} = u_k(a)$, donc $\sum u_k$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$. On en déduit que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(2x) - f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{x^2}{4^{k-1}}) - \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{x^2}{4^k}) = \ln(1 + x^2)$, donc f satisfait l'équation fonctionnelle.

Exercice 16 : ENSAM

1. La fonction f , continue sur $\mathbb{R}_+$, admet des primitives, soit F l'une d'elles. Alors $g: x \mapsto \frac{1}{x}(F(x^3) - F(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par quotient, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{x(3x^2 f(x^3) - f(x)) - (F(x^3) - F(x))}{x^2} = 3xf(x^3) - \frac{f(x)}{x} - \frac{g(x)}{x}.$$

2. La fonction F est dérivable donc elle admet un développement limité d'ordre 1 en 0 : $F(x) = F(0) + xf(x) + o(x)$. Alors $F(x^3) = F(0) + o(x)$, donc

$$g(x) = \frac{F(x^3) - F(x)}{x} = \frac{-xf(x) - o(x)}{x} = -f(x) + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -f(0).$$

3. Si f est continue, g est continue : elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle y est dérivable, et elle l'est en 0 par prolongement par continuité établi à la question précédente, donc Φ va de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$.

Soient $(f_1, f_2) \in \mathcal{C}^2$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\Phi(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x) = \alpha_1 \Phi(f_1) + \alpha_2 \Phi(f_2)(x)$$

par linéarité de l'intégrale, et cette égalité reste vraie en 0. En effet,

$$\Phi(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(0) = -(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(0) = -\alpha_1 f_1(0) - \alpha_2 f_2(0) = (\alpha_1 \Phi(f_1) + \alpha_2 \Phi(f_2))(0).$$

En conclusion, Φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}$.

Il n'est pas surjectif car il existe des fonctions de $\mathcal{C}$ non dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (par exemple $x \mapsto |x - 1|$).

Espaces vectoriels normés

Exercice 17 : MT 2023

1. Cours.
2. On étudie les fonctions $t \mapsto (t - 1)^2$ et $t \mapsto 2e^{-t}$ sur $\mathbb{R}^+$ pour observer que : si $t \in [0, \ln(2)]$, $(t - 1)^2 \leq 1 \leq 2e^{-t}$ donc $\Phi(t) = 2e^{-t}$, si $t \in [\ln(2), 2]$, $\Phi(t) = 1$, et si $t \geq 2$, $\Phi(t) = (t - 1)^2$. La fonction Φ est clairement continue sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1, 2\}$ et continue à gauche et à droite en 2 et en $\ln(2)$.

Exercice 18 : MT

1. Comme $\det(I - A) = \chi_A(1) \neq 0$ car $1 \notin \text{Sp}(A)$, les matrices $I - A$ et $A - I$ sont inversibles. Alors

$$S = AS + B \iff (I - A)S = B \iff S = (I - A)^{-1}B,$$

donc S existe et est unique.

2. On montre par une récurrence facile (qui utilise $AS + B = S$) que pour tout entier p , on a $X_p = S + A^p(X_0 - S)$, donc

$$X_p - S = A^p(X_0 - S).$$

La matrice A est diagonalisable de valeurs propres de modules strictement plus petits que 1, donc il existe D diagonale de termes diagonaux de modules strictement plus petits que 1 et P inversible tels que $A = PDP^{-1}$ donc $A^p = PD^pP^{-1}$ donc

$$X_p - S = PD^pP^{-1}(X_0 - S).$$

L'application $\varphi: M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto PMP^{-1}(X_0 - S) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est linéaire en dimension finie donc continue. Ici, $D^p \rightarrow 0$, donc $PD^pP^{-1}(X_0 - S) \rightarrow 0$, donc $X_p - S \rightarrow 0$, donc

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} X_p = S.$$

Exercice 19 : IMT

Pour tout $u = (u_n) \in \ell^\infty$, on a $|\Delta(u)| \leq 2\|u\|$ donc $\Delta(u) \in \ell^\infty$. De plus, Δ est linéaire et $\|\Delta(u)\| \leq 2\|u\|$ donc elle est aussi continue et $\|\Delta\| \leq 2$.

Pour $u = ((-1)^n)$, qui est bien bornée et de norme 1, on a $\|\Delta(u)\| = 2$, et donc $\|\Delta\| = 2$.

Exercice 20 : CCINP

- Les deux applications en question sont linéaires. Leur espace de départ est un espace vectoriel normé de dimension finie (leur espace d'arrivée est un espace vectoriel normé : il est aussi de dimension finie puisque c'est le même, mais cela importe peu). Un résultat du cours affirme alors que les applications $M \mapsto MX$ et $M \mapsto P^{-1}MP$ sont continues.
- L'application $(M, N) \mapsto MN$ est bilinéaire et son espace de départ est un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies, donc l'application en question est continue (résultat du cours).
- Soient λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. On établit aisément par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n X = \lambda^n X.$$

Soit $i_0 \in \{1, \dots, p\}$ un indice tel que la composante x_{i_0} de X soit non nulle. En notant $a_{i,j,n}$ les éléments de la matrice A^n , l'égalité ci-dessus entraîne, en examinant la composante i_0 , la relation suivante : $\sum_{j=1}^p a_{i_0,j,n} x_j = \lambda^n x_{i_0}$. En divisant par le nombre non nul x_{i_0} et en appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|\lambda^n| \leq \sum_{j=1}^p |a_{i_0,j,n}| \left| \frac{x_j}{x_{i_0}} \right| \leq K \|A^n\|,$$

où K désigne le nombre réel positif $\sum_{j=1}^p |x_j/x_{i_0}|$. On en déduit que la suite $(|\lambda^n|)_{n \geq 0}$ est bornée, donc que $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 21 : Centrale

- L'inégalité $|x_n y_n| \leq \frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)$ montre que, si (x_n) et (y_n) appartiennent à E , alors la série de terme général $x_n y_n$ est absolument convergente, donc convergente. Ensuite :
 - L'ensemble E est non vide car il contient la suite nulle.
 - Il est stable par le produit par un scalaire (évident).

- Il est stable par la somme, car si (x_n) et (y_n) appartiennent à E , alors $0 \leq (x_n + y_n)^2 = x_n^2 + y_n^2 + 2x_n y_n$, qui est une somme de trois termes de séries convergentes, donc $\sum (x_n + y_n)^2$ converge.

Par suite, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. On va plutôt montrer que $(x, y) \in E^2 \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ définit un produit scalaire sur E , et la proposition demandée en résulte ($x \mapsto \|x\|$ sera la norme euclidienne associée à ce produit scalaire).

Tout d'abord, pour tout $(x, y) \in E^2$, la série de terme général $x_n y_n$ converge (vu plus haut). Ensuite, la bilinéarité et la symétrie sont évidentes. Enfin, $\langle x, x \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 = 0$ si et seulement si x est la suite nulle.

3. L'application F est clairement linéaire, et lipschitzienne de rapport 1 car

$$\forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \quad |F(x)| = |x_0| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2} = \|x\|.$$

Par suite, F est continue.

4. De l'inégalité $(x_n + x_{n+1})^2 \leq 2(x_n^2 + x_{n+1}^2)$, on déduit d'une part que $(x_n + x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à E , et d'autre part que

$$\|G(x)\|^2 \leq 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (x_n^2 + x_{n+1}^2) = 2(\|x\|^2 + \|x\|^2 - x_0^2) \leq 4\|x\|^2.$$

Comme G est manifestement linéaire, il résulte de cette inégalité de qu'elle est 2-lipschitzienne, donc qu'elle est continue.

Exercice 22 : Centrale L'inégalité de Cauchy et Schwarz montre que $\forall f \in E, \Phi(f) \leq \left(\int_0^1 1\right)^{1/2} \times \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2} = \|f\|_2$. On en déduit que Φ est 1-lipschitzienne :

$$\forall (f, g) \in E^2, |\Phi(f) - \Phi(g)| = \left| \int_0^1 |f| - |g| \right| \leq \int_0^1 \|f| - |g|\| \leq \int_0^1 |f - g| = \Phi(f - g) \leq \|f - g\|_2,$$

donc que Φ est continue.

Exercice 23 : MP

Les deux premières questions sont indépendantes du caractère euclidien de E .

1. La fonction N est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On désigne par u et v deux endomorphismes de E et par λ un nombre réel.
 - Séparation. On suppose que $N(u) = 0$. Alors $u(x) = 0$ pour tout $x \in E$ de norme 1 et, si $y \in E$ est non nul, $u(y) = \|y\|u(\frac{y}{\|y\|}) = 0$. Enfin, $u(0) = 0$, et u est l'endomorphisme nul.
 - Homogénéité. Pour tout $x \in E$ de norme 1, on a $\|(\lambda u)(x)\| = |\lambda| \|u(x)\| \leq |\lambda| N(u)$, donc

$$N(\lambda u) \leq |\lambda| N(u).$$

En appliquant cette relation pour le scalaire $\frac{1}{\lambda}$ s'il n'est pas nul et pour l'endomorphisme λu , on obtient $N(u) \leq |\frac{1}{\lambda}| N(\lambda u)$, ou encore

$$|\lambda| N(u) \leq N(\lambda u).$$

Il en résulte que $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$ lorsque λ est non nul, et cela reste vrai lorsque $\lambda = 0$.

- Inégalité triangulaire. Pour tout $x \in E$ de norme 1, on a $\|(u+v)(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\| \leq N(u) + N(v)$, et on en déduit que $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ en passant à la borne supérieure dans le membre de gauche.

La fonction N est appelée la norme subordonnée à $\| \cdot \|$.

2. Pour tout $y \in E$ non nul, la définition de N montre que

$$\|u(y)\| = \|y\| \left\| u \left(\frac{y}{\|y\|} \right) \right\| \leq \|y\| N(u),$$

et cette inégalité reste évidemment vraie pour $y = 0$. Alors, pour tout $x \in E$ de norme 1, on a $\|(u \circ v)(x)\| \leq N(u)\|v(x)\| \leq N(u)N(v)$. En passant à la borne supérieure dans le membre de gauche, on obtient

$$N(u \circ v) \leq N(u)N(v).$$

On dit que N est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}(E)$.

3. On utilise $\mathcal{S}^{++}(E) = \{u \in \mathcal{S}(E), \forall x \in E \setminus \{0\}, \langle x, u(x) \rangle > 0\}$. La fonction numérique $f: x \mapsto \langle x, u(x) \rangle$ est continue et la sphère unité S de E est fermée et bornée dans un espace vectoriel de dimension finie, donc f est bornée sur S et atteint ses bornes. En particulier, il existe $x_0 \in E$ de norme 1 (donc non nul), tel que

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = 1 \implies \langle x, u(x) \rangle \geq f(x_0) > 0.$$

L'inégalité demandée s'en déduit immédiatement.

Suites et séries de fonctions

Exercice 24 : CCINP 2024

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = o(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$ donc par TCSATP, $\sum u_n$ converge simplement sur $D = \mathbb{R}$.
2. u_n est paire donc on peut restreindre l'étude à $\mathbb{R}^+$. Soit $A > 0$ et $x \in [0, A]$ on a u_n croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $\sum \|u_n\|_{\infty}^{[0, A]}$ converge d'après la convergence simple donc on a convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}^+$ donc S est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $\mathbb{R}$ par théorème.
3. On restreint l'étude à $\mathbb{R}^{+*}$, soit $x \in]a, +\infty[$ avec $a > 0$. Par comparaison série intégrale,
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2x}{\ln(1+k)(1+k^2x^2)} \leq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{2x}{\ln(1+t)(1+t^2x^2)} dt \leq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{2x}{\ln(1+t)(1+t^2a^2)} dt,$$
 reste d'une intégrale convergente qui tend donc vers 0, donc $\sum u'_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$ et de $\mathbb{R}^{-*}$ par imparité.
4. On applique le théorème, S est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25 : CCINP 2024

Exercice 26 : CCINP 2024

Exercice 27 : CCINP Mineur 2022

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_n(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{n!} \leq \frac{1}{n!}$ donc par passage à la borne supérieure, u_n est bornée et $\|u_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{n!}$ terme général d'une série exponentielle convergente, donc par critère de majoration pour les séries à termes positifs, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc également uniformément et simplement.
2. Notons sa somme S . On a : $S(x) = \text{Im}(T(x))$ en notant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n!}$ (la série converge normalement sur $\mathbb{R}$ de même qu'au 1.)
Or $T(x) = e^{e^{ix}} = e^{\cos(x)} e^{i \sin(x)}$ donc $S(x) = e^{\cos(x)} \sin(\sin(x))$. On en déduit que S est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont.

Exercice 28 : ENSEA 2024**Exercice 29 : MT 2024****Exercice 30 : ENSEA 2021 : sans préparation**

- Soit $x < 0$. Alors $\frac{e^{-nx}}{n} \rightarrow +\infty$ donc la série $\frac{(-1)^n e^{-nx}}{n} \rightarrow +\infty$ diverge grossièrement.
 Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a une série alternée qui vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées car la suite $(\frac{e^{-nx}}{n})_n$ est décroissante et tend vers 0 donc la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
 Le théorème des séries alternées donne également une majoration uniforme du reste noté pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k e^{-kx}}{k} : \forall x \in \mathbb{R}^+, |R_n(x)| \leq \left| \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1}$ donc R_n est bornée et $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$ ce qui montre d'après le théorème d'encadrement que la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle donc que $\|R_n\|_\infty \rightarrow 0$ donc la série converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (e^{-x})^n}{n} = -\ln(1 + e^{-x})$ d'après le DSE de $x \mapsto \ln(1+x)$ (ici $e^{-x} < 1$ car $x > 0$).
 Comme on a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, par théorème, S est continue sur $\mathbb{R}^+$. En particulier la continuité en 0 donne $S(0) = \lim_{x \rightarrow 0} S(x) = -\ln(2)$.

Exercice 31 : CCINP 2022

- Soit $x > 0$. On a $u_n(x) \sim \frac{x}{x^2 n^{\frac{3}{2}}}$, terme général d'une série à termes positifs convergente par critère de Riemann donc $\sum u_n(x)$ converge également par critère d'équivalence. Si $x = 0$, la série converge puisque $u_n(0) = 0$.
- (a) On remarque que $u_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{2n}$ terme général d'une série divergente. Si la série convergerait normalement sur $\mathbb{R}^+$, comme $|u_n(\frac{1}{\sqrt{n}})| \leq \|u_n\|_\infty$ on aurait par critère de majoration pour les séries à termes positifs, $\sum u_n(\frac{1}{\sqrt{n}})$ convergente ce qui est faux. Donc la série ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.
 (b) Soit $a > 0$. A n fixé dans $\mathbb{N}^*$, l'étude des variations de u_n montre que u_n est croissante sur $[0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty[$. Or il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < a$ et donc tel que $\|u_n\|_\infty^{[a, +\infty[} = |u_n(a)|$ terme général d'une série convergente d'après la convergence simple établie au 1. Donc la série converge normalement sur $[a, +\infty[$.
- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $R_n(x) - R_{2n}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)} \geq \frac{\sqrt{n}x}{\sqrt{2}(1+2nx^2)}$.
 (b) Donc $R_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - R_{2n}(\frac{1}{\sqrt{n}}) \geq \frac{1}{3\sqrt{2}}$ donc cette différence ne peut pas tendre vers 0. Si la série convergerait uniformément on aurait $\|R_n\|_\infty \rightarrow 0$ et comme $R_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - R_{2n}(\frac{1}{\sqrt{n}}) \leq \|R_n\|_\infty + \|R_{2n}\|_\infty$, on aurait $R_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - R_{2n}(\frac{1}{\sqrt{n}}) \rightarrow 0$, ce qui est faux. Donc la série ne converge pas uniformément.

4. Les deux extrémités de l'inégalité tendent vers $2\frac{\pi}{2} = \pi$ donc par théorème d'encadrement, $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow 0} \pi$. La fonction f n'est donc pas continue en 0.
5. Soit $x > 0$. On fait une comparaison série intégrale avec la fonction décroissante positive et continue sur $[1, +\infty[: \phi_x : t \mapsto \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}$ ce qui donne pour tout $n \in \mathbb{N}^* : \int_n^{n+1} \phi_x(t) dt \leq \phi_x(n)$ et pour tout $n \geq 2, \int_{n-1}^n \phi_x(t) dt \geq \phi_x(n)$, d'où l'on déduit par sommation :

$$\int_1^{+\infty} \phi_x(t) dt \leq f(x) \leq \int_1^{+\infty} \phi_x(t) dt + u_1(x)$$

On calcule l'intégrale (avec le changement de variables affine $u = \sqrt{t}x$) : $\int_1^{+\infty} \phi_x(t) dt = \int_x^{+\infty} \frac{2}{1+u^2} du = \pi - 2 \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Finalement on obtient bien :

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq f(x) \leq \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1+x^2}$$

Exercice 32 : CCINP On pose $u_n(x) = \sin(a^n x)$. La majoration $|u_n(x)| \leq |a|^n |x|$ montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n^{(p)}(x) = a^{np} \sin\left(a^n x + \frac{\pi p}{2}\right)$, donc $\|u_n^{(p)}\|_\infty \leq |a|^{np}$.

Il en résulte que la série $\sum u_n^{(p)}$ est normalement donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 33 : CCINP Pour $x > 0$, on a

$$x^x = e^{x \ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!},$$

donc

$$I = \int_{]0,1]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx \quad \text{avec} \quad f_n : x \mapsto \frac{(x \ln x)^n}{n!}.$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur $]0, 1]$. Les fonctions f_n sont intégrables et

$$\int_{]0,1]} |f_n| = \int_{]0,1]} (-1)^n \frac{x^n (\ln x)^n}{n!} dx$$

Or

$$\int_\varepsilon^1 x^n (\ln x)^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln x)^n \right]_\varepsilon^1 - \frac{n}{n+1} \int_\varepsilon^1 x^n (\ln x)^{n-1} dx$$

donc quand $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{]0,1]} x^n (\ln x)^n dx = -\frac{n}{n+1} \int_{]0,1]} x^n (\ln x)^{n-1} dx.$$

Ainsi

$$\int_{]0,1]} x^n (\ln x)^n dx = (-1)^n \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+1} \cdots \frac{1}{n+1} \int_{]0,1]} x^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Par suite

$$\int_{]0,1]} |f_n| = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

et il y a convergence de la série $\sum \int_{]0,1]} |f_n|$. Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient que l'intégrale I est définie et

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{]0,1]} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

puis le résultat voulu.

Exercice 34 : CCINP On pose $u_n(x) = \frac{a^n}{n+x}$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Si $-x \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n(x))$ n'est pas défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $-x \notin \mathbb{N}$, $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a^n}{n}$.
 - Si $|a| < 1$, $\sum \frac{a^n}{n}$ converge absolument, donc $\sum u_n(x)$ aussi.
 - Si $|a| > 1$, $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement.
 - Si $a = 1$, $\sum u_n(x)$ diverge.
 - Si $a = -1$, $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge d'après le théorème spécial des séries alternées.
 En conclusion, si $|a| < 1$ ou $a = -1$, S est défini sur $\mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$; sinon, S n'est pas défini.
2. On suppose $|a| < 1$.
 - (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur $]0, +\infty[$. On montre qu'il y a convergence normale sur tout intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$ où $\alpha > 0$, donc S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - (b) Soit $x > 0$. On calcule $S(x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{n+x}$, donc

$$aS(x+1) = S(x) - \frac{1}{x}.$$

- (c) Par continuité de S , on a $\lim_{x \rightarrow 0} S(x+1) = S(1)$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} (S(x) - \frac{1}{x}) = aS(1)$. On en déduit que $S(x) = \frac{1}{x} + O(1)$, donc

$$S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

- (d) La convergence normale sur $[\alpha, +\infty[$ et le fait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$ entraînent avec le théorème de la double limite que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0.$$

Exercice 35 : MT

1. Une application immédiate de la règle de D'Alembert donne que $R = 1$. Pour $t = 1$, $\sum u_n(1)$ converge d'après le théorème spécial des séries alternées et pour $t = -1$, $\sum u_n(t)$ diverge. On en déduit que f est défini sur $] -1, +1[$.
2. Soit $[a, b] \subset [0, 1[$. Soit $t \in [a, b]$. Comme $|u_n(t)| \leq \frac{|t|^n}{\sqrt{1+n^2}} \leq |u_n(b)|$. Il y a donc convergence normale sur tout segment inclus dans $[0, 1[$.
3. On a $\int_0^1 |u_n| = \frac{1}{(n+1)\sqrt{1+n^2}} \sim \frac{1}{n^2}$.
4. On en déduit que $\sum v_n$ est convergente.
5. On applique le théorème d'intégration terme à terme d'une série sur un intervalle quelconque :

$$\int_0^1 f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{1+n^2}}.$$

Exercice 36 : MT Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{x^2+n^2}$.

1. Comme $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$, la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $\mathbb{R}$. Comme chaque u_n est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction u_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec $\int_0^{+\infty} |u_n(x)| dx = \frac{\pi}{2n}$: c'est le terme général d'une série divergente. Pour établir l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$ et calculer son intégrale, on va appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (S_n) des sommes partielles de $\sum u_n$. En effet, à $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, la suite de terme général $u_n(x)$ est alternée de premier terme négatif, et celle de terme général $|u_n(x)|$ est décroissante de limite nulle. Les sommes partielles vérifient donc les encadrements du théorème spécial des séries alternées :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_1(x) = u_1(x) = -\frac{1}{1+x^2} \leq S_n(x) \leq S_2(x) \leq 0.$$

On en déduit l'hypothèse de domination $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, |S_n(x)| \leq \varphi(x) := \frac{1}{1+x^2}$, où φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Comme la suite (S_n) converge simplement vers la fonction continue f , le théorème de convergence dominée affirme que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} S_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n} \arctan \left(\frac{x}{n} \right) \right]_{x=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Le calcul de la somme de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ peut s'obtenir en montrant que la série de fonctions de terme général $\frac{(-1)^n x^n}{n}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ (par exemple en utilisant une majoration du reste avec le théorème spécial des séries alternées), ce qui montre que sa somme : $S : x \mapsto -\ln(1-x)$, continue sur $] -1, 1[$ avec le cours sur les séries entières, est continue sur $[0, 1]$ donc $S(0) = \ln(2)$.

Exercice 37 : MP 2024

Exercice 38 : X Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : x \in [0, +\infty[\mapsto \frac{(-1)^n e^{-nx}}{1+n^2} \in \mathbb{R}$.

1. La série de fonctions continues $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ (puisque $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$), donc sa somme est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Montrons que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \forall x \in \mathbb{R}, u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{n+k} n^k e^{-nx}}{1+n^2}$.
- Pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a $\|u_n^{(k)}\|_\infty^{[a,b]} = \frac{n^k e^{-an}}{1+n^2}$ et, comme $a > 0$, les croissances comparées donnent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \|u_n^{(k)}\|_\infty^{[a,b]} = 0$$

donc $\sum \|u_n^{(k)}\|_\infty^{[a,b]}$ converge.

Ainsi *toutes* les séries dérivées successives convergent normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, le théorème du cours donne alors le résultat annoncé : f est de classe C^k sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec de plus :

$$\forall x > 0, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+k} n^k e^{-nx}}{1+n^2}.$$

2. En particulier on obtient une équation différentielle vérifiée par f :

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2 e^{-nx}}{1+n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1+n^2-1) e^{-nx}}{1+n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-nx} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{1+n^2}$$

$$\text{Donc } f''(x) = -\frac{1}{1+e^{-x}} - f(x). \quad f \text{ est solution sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ de } y'' + y = -\frac{1}{1+e^{-x}}.$$

REMARQUE. — En fait la série dérivée $\sum \frac{(-1)^{n+1} n e^{-nx}}{1+n^2}$ converge *uniformément* sur $\mathbb{R}_+$ par application classique du théorème spécial avec majoration uniforme du reste et donc f est aussi dérivable en 0 à droite

$$\text{avec } f'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^2}.$$

Exercice 39 : Centrale On étudie la série numérique de terme général $a_n(y) = (-1)^n \frac{y}{\sqrt{1+n^2 y^2}}$ pour y fixé dans $\mathbb{R}^*$ (si $y = 0$, le terme général est nul et la série converge). Il est clair que la suite $(a_n(y))$

est alternée, de limite nulle, et que la suite de terme général $|a_n(y)| = \frac{|y|}{\sqrt{1+n^2y^2}}$ décroît. Le théorème de Leibniz dit que $\sum a_n(y)$ converge, et que le reste à l'ordre n vérifie $|R_n(y)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k(y)| \leq |a_{n+1}(y)|$. On note $A(y)$ la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(y)$.

Par ailleurs, $y \mapsto a_n(y)$ est une fonction impaire de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Sa dérivée est donnée par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad a'_n(y) = (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{1+n^2y^2}} + y \frac{-2n^2y}{2(1+n^2y^2)^{3/2}} \right] = \frac{(-1)^n}{(1+n^2y^2)^{3/2}}.$$

On en déduit que a_n est strictement monotone sur $\mathbb{R}$, et le caractère impair de a_n montre alors que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |a_n(y)| \leq \lim_{y \rightarrow +\infty} |a_n(y)| = \frac{1}{n}.$$

1. D'après l'étude menée ci-dessus, la série de terme général $u_n(x) = a_n(f(x))$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'existence (c'est-à-dire la convergence simple) de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est donc établie. La convergence uniforme résulte de la majoration du reste et de l'étude de la fonction a_n menée ci-dessus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |R_n(f(x))| \leq |a_{n+1}(f(x))| \leq \frac{1}{n+1}.$$

2. Si f est continue, $u_n = a_n \circ f$ l'est aussi, et la continuité de S résulte de la convergence uniforme de la série de fonction $\sum u_n$.

On peut aussi dire que $\sum a_n$ converge uniformément vers g et, comme, les fonctions a_n sont continues, A l'est aussi. Il suffit enfin d'écrire que $S = A \circ f$ pour conclure.

C'est cette dernière relation qui va montrer que la réciproque est vraie : si S est continue, alors f l'est. Il suffit pour cela de montrer que A est bijective ((de $\mathbb{R}$ sur son image) et de réciproque continue. On en déduira que

$$f = A^{-1} \circ S,$$

donc que f est continue. Pour cela, il suffit de montrer que A est continue (c'est déjà fait) et strictement monotone. Prouvons en fait que A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$: chaque a_n est de classe $\mathcal{C}^1$, l'expression de a'_n calculée ci-dessus montre que, pour $y_0 > 0$ fixé

$$\|a'_n\|_{\infty, [y_0, +\infty[} = \frac{1}{(1+n^2y_0^2)^{3/2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{y_0^3 n^3}.$$

On en déduit la convergence normale de $\sum a'_n$ sur $[y_0, +\infty[$, ce qui montre que A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[y_0, +\infty[$ pour tout $y_0 > 0$, donc A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad A'(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a'_n(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n^2y^2)^{3/2}}.$$

De plus, pour $y > 0$ fixé, la série ci-dessus vérifie les hypothèses du théorème de Leibniz, donc $A'(y)$ est du signe de son premier terme, qui vaut 1. Par suite, A est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et, comme elle est continue sur $\mathbb{R}$, donc en zéro en particulier, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, comme A est une fonction impaire, on conclut qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui achève la preuve.

Exercice 40 : MP On pose $u_n(x) = \frac{1}{n!(x+n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, $0 \leq \frac{1}{n!(x+n)} \leq \frac{1}{n!x}$. La convergence de $\sum \frac{1}{n!}$ assure la convergence simple de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $a > 0$. L'encadrement $\forall x \geq a, 0 \leq \frac{1}{n!(x+n)} \leq \frac{1}{n!a}$ prouve la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[a, +\infty[$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!(x+n)} = 0$, le théorème d'interversion des limites montre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Posons $v_n(x) = u_n(x) - \frac{1}{n!x} = -\frac{n}{n!(x+n)x}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = f(x) - \frac{e}{x} = -\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!(n+x)}.$$

Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq \left| \frac{n}{n!(n+x)} \right| \leq \frac{1}{n!}$, ce qui montre la convergence normale de $\sum v_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!(n+x)} = 0$, donc $f(x) = \frac{e}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, c'est-à-dire

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{x}.$$

3. Soit $x < 0$. On calcule

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{e}{x} &= -\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!(n+x)} = -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n)!(n+x+1)} = -\frac{1}{x} f(x+1) = -\frac{1}{x} \left[\frac{e}{x+1} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\ &= -\frac{e}{x^2} + \left(\frac{1}{x^2} \right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$f(x) - \frac{ex - e}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Exercice 41 : Centrale

1. Si $x < 0$, la série définissant $f(x)$ diverge grossièrement, et pour $x = 0$ c'est la série harmonique, qui diverge également.

Pour $x > 0$ en revanche, on a $0 < \frac{e^{-nx}}{n+x} \leq e^{-nx}$, terme général d'une série géométrique de raison $0 < e^{-x} < 1$ donc absolument convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, on conclut que la série définissant $f(x)$ converge absolument, donc

$$D_f = \mathbb{R}_+^*.$$

De plus les fonctions $u_n: x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n+x}$ sont toutes continues, positives et décroissantes. Pour tout $a > 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n(a) = \|u_n\|_{\infty, [a; +\infty[}$. La convergence simple entraîne donc la convergence normale de la série de fonction sur tout intervalle de type $[a; +\infty[$, avec $a > 0$. D'où la continuité de f .

2. Il n'y a clairement pas convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$ entier, puisque $\|u_n\|_{\infty} = \frac{1}{n}$, terme général d'une série divergente.

Il n'y a pas non plus convergence uniforme. Montrons en effet que pour tout n , le reste R_n n'est pas borné sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A > 0$. Par divergence de la série harmonique, on peut trouver $m > n$ tel que $\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} > A + 1$.

Mais alors $\sum_{k=n+1}^m u_k(x) \rightarrow \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} > A + 1$ quand $x \rightarrow 0^+$, on peut donc trouver $x > 0$ tel que $\sum_{k=n+1}^m u_k(x) > A$, donc $R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^m u_k(x) > A$ (on ajoute $R_m(x) > 0$ à la somme finie).

3. Supposons f polynomiale sur un intervalle ouvert non trivial I . Alors il existe un entier p_0 tel que $f^{(p_0)}$ est nulle sur I . Or par la formule de Leibniz, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{(k-1)!(-1)^k}{(n+x)^{k+1}} (-n)^{p-k} e^{-nx},$$

ce qui permet de justifier que $\sum_{n \geq 1} u_n^{(p)}$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ donc que f est $\mathcal{C}^\infty$ avec $\forall p \in \mathbb{N}, f^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}$. Comme enfin $u_n^{(p_0)}$ ne s'annule pas et est du signe de $(-1)^{p_0-1}$, on en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p_0)}$ ne peut s'annuler, encore moins sur tout un intervalle non trivial.

4. Pour $x < 1$ par exemple, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n(x) - \frac{e^{-nx}}{n}| = \frac{xe^{-nx}}{n(n+x)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$. En sommant et par inégalité triangulaire, il vient

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| u_n(x) - \frac{e^{-nx}}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} + O(1) = -\ln(1 - e^{-x}) + O(1)$. Enfin $\ln(1 - e^{-x}) \sim \ln x$, donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x.$$

Ensuite pour tout $x > 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n(x) \leq \frac{e^{-nx}}{x}$ donc en sommant $f(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{x} = \frac{e^{-x}}{x(1-e^{-x})} \sim \frac{e^{-x}}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$. D'autre part $f(x) \geq u_1(x) = \frac{e^{-x}}{1+x} \sim \frac{e^{-x}}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$. Par encadrement, il vient

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.$$

Exercice 42 : MP 2025

- On a $|u_n(x)| \sim |x|^n$ terme général d'une série géométrique convergente si $|x| < 1$, donc f est bien définie sur $] -1, 1[$. Puis, u_n est de classe C^1 sur $] -1, 1[$ et $u'_n(x) = \frac{(-1)^n n x^{n-1}}{(1-x^n)^2}$ donc $\forall x \in [-r, r]$ (avec $r \in]0, 1[$) $|u'_n(x)| \leq \frac{nr^{n-1}}{(1-r^n)^2}$ terme général d'une série convergente ce qui montre la convergence normale donc uniforme de $\sum u'_n$ sur tout segment de $] -1, 1[$ donc la somme f est par théorème de dérivation terme à terme de classe C^1 sur $] -1, 1[$.
- On peut remarquer que pour $x \in]0, 1[$ la série de terme général $v_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}$ est une série alternée qui vérifie bien les hypothèses du théorème, donc $|R_n(x)| \leq |v_n(x)|$ et majorer uniformément par une suite qui tend vers 0, ou faire une étude de fonctions pour montrer la convergence normale.
- On peut alors appliquer le théorème de la double limite et $(1-x)f(x) \rightarrow_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$

Intégrales généralisées, intégrales à paramètres

Exercice 43 : MT 2025

- Soit $x > 0$, $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $]x, +\infty[$ et dominée par $\frac{1}{t^2}$ donc intégrable en $+\infty$.
- $g : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2} - \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, 1[$ et intégrable en 0 car prolongeable par continuité en 0 (de limite 0 en 0) donc $\int_x^1 g(t)dt \rightarrow_{x \rightarrow 0} \int_0^1 g$. Soit $x > 0$. On a :

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt + \int_x^1 g(t)dt + \int_x^1 \frac{1}{t} dt = \frac{\sin(t)}{t} dt + \int_x^1 g(t)dt - \ln(x)$$

On fait ensuite tendre x vers 0, les 2 premiers termes ont une limite finie négligeable devant $-\ln(x)$ qui tend vers $+\infty$ donc $f(x) \sim_{x \rightarrow 0} -\ln(x)$.

3. Par IPP on obtient pour $x > 0$, $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2} - \int_x^{+\infty} 2 \frac{\cos(t)}{t^3} dt$, la deuxième intégrale étant convergente, elle définit une fonction bornée donc $f(x) = O(\frac{1}{x^2})$.

Exercice 44 : CCINP 2025

Exercice 45 : CCINP 2025

Exercice 46 : MT 2023 sans préparation

On pourrait décomposer l'intégrale de la façon suivante :

$$\int_{ax}^{bx} \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{1}{t} - \int_{ax}^{bx} \frac{1 - \cos(t)}{t} dt$$

la 1ère intégrale tendant vers $\ln(\frac{b}{a})$ et la deuxième vers 0 (la fonction étant intégrable en 0 car prolongeable par continuité).

On peut également poser $t = ux$ puis appliquer le théorème de convergence dominée à paramètre continu sur le segment $[a, b]$, la fonction étant dominée par $\frac{1}{t}$ continue donc intégrable sur le segment.

Finalement la limite vaut $\ln(\frac{b}{a})$.

Exercice 47 : CCINP 2023

1. L'intégrande définit une fonction f continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f(t) \sim_{t \rightarrow 0} 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0, et $f(t) = O_{t \rightarrow +\infty}(e^{-t})$, fonction intégrable en $+\infty$ donc par comparaison, f est intégrable en $+\infty$, l'intégrale converge donc.
2. Pour $t > 0$, on a $f(t) = \frac{2e^{-t} \sin(t)}{1 - e^{-2t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2e^{-t} \sin(t) e^{-2nt}$.
3. On applique le théorème d'intégration terme à terme à la suite de fonctions continues $(f_n)_n$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par pour tout $t > 0$: $f_n(t) = 2e^{-(2n+1)t} \sin(t)$. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ d'après 2. et a pour somme f . A $n \in \mathbb{N}$ fixé, f_n est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, prolongeable par continuité en 0, et $f_n(t) = O_{t \rightarrow +\infty}(e^{-2nt})$, qui est intégrable en $+\infty$, donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Enfin pour tout $t > 0$: $|\sin(t)| \leq |t|$ donc $|f_n(t)| \leq 2|t|e^{-2nt}$ et par intégration par parties, le crochet étant bien défini (limites en 0 et en $+\infty$ nulles) :

$$\int_0^{+\infty} 2te^{-2nt} dt = \frac{2}{2n} \int_0^{+\infty} e^{-2nt} dt = \frac{1}{n^2}$$

qui est le terme général d'une série convergente, donc par comparaison pour des séries à termes positifs, la série $\sum_n \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ converge ce qui autorise l'application du théorème pour intervertir la somme et l'intégrale :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Im}(2e^{(i-(2n+1))t}) dt = \frac{2}{(2n+1)^2 + 1}.$$

4. On utilise une comparaison série intégrale avec la fonction continue décroissante positive : $t \mapsto \frac{1}{t^2 + 1}$ que l'on intègre entre $2k + 1$ et $2k + 3$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis par sommation d'inégalités, on obtient l'encadrement suivant :

$$I - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 1} dt \leq I$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

Exercice 48 : CCINP Mineur 2022

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\phi : t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $t \geq 0$, et tout $x \geq 0$, $0 \leq \phi(t) \leq \frac{1}{1+t^2}$, cette dernière fonction étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$, ϕ l'est également par critère de majoration pour les fonctions intégrables.

Si $x < 0$, $e^{-x\frac{t}{2}} \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} +\infty$ et par croissances comparées $\frac{e^{-x\frac{t}{2}}}{1+t^2} \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $e^{-x\frac{t}{2}} = o_{t \rightarrow +\infty}(\frac{e^{-xt}}{1+t^2})$. Or $-x > 0$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x\frac{t}{2}} dt$ diverge donc par comparaison, $\int_0^{+\infty} \phi(t) dt$ diverge également. Donc $D = \mathbb{R}^+$.

On applique le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, ϕ est continue donc CPM sur $\mathbb{R}^+$. On a la domination :

$$\forall (x, t) \in (\mathbb{R}^+)^2, 0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\phi(0) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, ϕ est continue donc CPM sur $\mathbb{R}^+$. En notant $\ell : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto 0$ si $t > 0$ et $\frac{1}{2}$ si $t = 0$, ℓ est continue par morceaux et la domination précédente permet d'appliquer le théorème de convergence dominée à paramètre continu. Donc ℓ est intégrable et surtout $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} \ell(t) dt = 0$.

Exercice 49 : CCINP 2021

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\phi : t \mapsto \frac{t^x}{1+t}$ est continue sur $]0, 1]$ à valeurs positives et $\phi(t) \sim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{-x}}$ qui est intégrable ssi $x > -1$ donc par critère d'équivalence pour les fonctions intégrables, ϕ est intégrable ssi $x > -1$. La fonction f est donc définie sur $D =]-1, +\infty[$.
2. On a $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{t}}{1+t}$. La fonction $\psi :]0, 1] \rightarrow]0, 1]$, $u \mapsto u^2$ est une bijection de classe C^1 strictement croissante d'après le théorème de changement de variables, $f(\frac{1}{2}) = \int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2} du = 2 \int_0^1 1 du - \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du = 2 - 2(\frac{\pi}{4}) = 2 - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 49 : CCINP 2021

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $f_x : t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$ est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ dépend donc de son comportement en $+\infty$.
Si $x \leq 0$ on a $\forall t \geq 0$, $0 < \frac{1}{1+t} \leq f_x(t)$ et comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t} dt$ diverge (puisque $\ln(1+x) \xrightarrow{+\infty} +\infty$) il en va de même de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.
En revanche si $x > 0$, alors $0 < f_x(t) < e^{-xt}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ converge, donc aussi $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.
2. (a) Soient $0 < x < y$. On a : $\forall t \geq 0$, $\frac{e^{-yt}}{1+t} \leq \frac{e^{-xt}}{1+t}$ et puisque les fonctions sont intégrables : $f(y) \leq f(x)$. Ainsi F est décroissante..., et positive.
(b) On a : $\forall x > 0$, $0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.
3. Notons $f : (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$ de sorte que $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$. On a :
 - $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x, \cdot) : t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$ est continue (continue par morceaux suffit) et intégrable (question a).
 - $\forall t \in [0, +\infty[$, $f(\cdot, t) : x \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{te^{-xt}}{1+t}$, qui est continue par rapport à x sur $]0, +\infty[$.

- Hypothèse de domination locale : soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. $\forall x \in [a, b]$, $\forall t \in [0, +\infty[$, $0 \leq |\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leq e^{-at} = \psi(t)$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ puisque $a > 0$.

Par le théorème de dérivation sous le signe $\int$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = - \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t} dt.$$

On a alors pour $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) - F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ soit aussi $F'(x) = F(x) - \frac{1}{x}$, ce qui permet de montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que F est de classe C^k sur $]0, +\infty[$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. Le changement de variable $t \mapsto x(1+t)$ est C^1 bijectif de $[0, +\infty[$ sur $[x, +\infty[$. Il donne, directement, en posant $u = x(1+t)$

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-u}}{u/x} \frac{du}{x} = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Comme $\frac{e^{-t}}{t} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ diverge, et comme la fonction est positive, on a en fait $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = +\infty$. Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = +\infty.$$

5. On a déjà $F(x) \underset{0^+}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = G(x)$. Montrons donc que $G(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x$, ce qui prouvera le résultat demandé.

Une intégration par parties (bien menée, utilisant que $e^{-t} \ln t = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$) donne :

$$\forall x > 0, \quad G(x) = [e^{-t} \ln t]_{t=x}^{t \rightarrow +\infty} + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = 0 - e^{-x} \ln x + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t dt.$$

Or comme $|e^{-t} \ln t| \underset{0^+}{\sim} -\ln t$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$ converge, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$ existe. Par ailleurs, on a l'équivalent $e^{-x} \ln x \underset{0^+}{\sim} \ln x$. Finalement,

$$G(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x.$$

Exercice 50 : CCINP

1. Définition de I_n : La fonction $t \mapsto t^{2n} e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, donc l'intégrale I_n converge.
2. Par intégration par partie sur $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$, en posant $u = e^{-t^2}$ et $v' = t^{2n}$, on a

$$I_n = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} e^{-t^2} \right]_0^{+\infty} + \frac{2}{2n+1} \int_0^{+\infty} t^{2n+2} e^{-t^2} dt = \frac{2}{2n+1} I_{n+1}.$$

Comme $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on déduit de la relation ci-dessus que

$$I_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^n} I_0 = \frac{(2n)!}{2^n n! 2^n} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3. On a $f(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(xt)^{2n}}{(2n)!} e^{-t^2} dt$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$f_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto (-1)^n \frac{(xt)^{2n}}{(2n)!} e^{-t^2}.$$

— Chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, de signe constant, intégrable sur $\mathbb{R}_+$, d'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{(-1)^n x^{2n} I_n}{(2n)!} = \frac{(-1)^n x^{2n} \sqrt{\pi}}{n! 2^{2n+1}}$.

- La série des f_n converge vers $t \mapsto \cos(xt)e^{-t^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- La série de terme général $\int_0^{+\infty} |f_n| = \frac{x^{2n}\sqrt{\pi}}{n!2^{2n+1}}$ converge pour tout x par le critère de d'Alembert.

Par théorème d'intégration terme à terme, on en déduit que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} \sqrt{\pi}}{n! 2^{2n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2/4)^n}{n!} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Exercice 51 : MT On pose $h(x, t) = e^{-xt} \frac{\sin t}{t}$ pour tout x réel et tout t réel non nul, prolongée par continuité par $h(x, 0) = 1$ pour tout x réel, de sorte que l'intégrale proposée soit faussement impropre en zéro.

1. Si $x > 0$, la majoration $|h(x, t)| \leq e^{-xt}$ valable pour tout $t \geq 1$ donne l'intégrabilité de $t \mapsto h(x, t)$, donc $\mathbb{R}_+^*$ est contenu dans l'ensemble de définition de f (on peut montrer que ce dernier vaut $\mathbb{R}_+$).

La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin t$. Soit $a > 0$. La domination $|\frac{\partial h}{\partial x}(x, t)| \leq e^{-at}$, valable pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+$, et l'intégrabilité de $t \mapsto e^{-at}$ sur $\mathbb{R}_+$ permettent d'appliquer le théorème de Leibniz : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0, +\infty[$, avec

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt = - \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt \right) = - \operatorname{Im} \left(\left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} \right]_{t=0}^{+\infty} \right)$$

Donc $f'(x) = - \operatorname{Im} \left(\frac{1}{x-i} \right) = - \frac{1}{1+x^2}$. Il en résulte l'existence d'une constante c telle que $f(x) = -\arctan x + c$ sur $]0, +\infty[$.

2. Soit (x_n) une suite qui tend vers $+\infty$ et telle que $x_n \geq 1$ pour tout n . Comme $|h(x_n, t)| \leq e^{-x_n t}$, la suite de fonctions $t \mapsto h(x_n, t)$ converge simplement vers la fonction nulle. Comme $x_n \geq 1$, on dispose de la domination $\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$, $|h(x_n, t)| \leq e^{-t}$. L'intégrabilité de $t \mapsto e^{-t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ permet d'appliquer le théorème de convergence dominée : la suite de terme général $f(x_n)$ converge vers zéro. Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) de limite $+\infty$, le théorème séquentiel montre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

3. La question (a) donne par ailleurs $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} + c$. On en déduit que $c = \frac{\pi}{2}$, puis que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

Exercice 52 : IMT On pose $f_a : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right) \frac{e^{ax}}{x}$. Les développements limités des fonctions usuelles montrent qu'au voisinage de zéro,

$$f_a(x) = \ln\left(\frac{x}{1 - [1 - x + x^2/2 + o(x^2)]}\right) \frac{1 + o(1)}{x} = \ln\left(\frac{1}{1 - x/2 + o(x)}\right) \frac{1 + o(1)}{x} = \left(\frac{x}{2} + o(x)\right) \frac{1 + o(1)}{x} \sim$$

L'intégrale proposée est donc faussement impropre en zéro. Au voisinage de $+\infty$, on dispose de l'équivalent $f_a(x) \sim \frac{\ln x}{x} e^{ax}$. On discute ensuite suivant le signe de a .

- Si $a < 0$, alors $x^2 f_a(x) \sim_{+\infty} (x \ln x) e^{ax}$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$, donc l'intégrale proposée est absolument convergente.
- Si $a = 0$, alors $f_0(x) \sim \frac{\ln x}{x} \geq \frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$, donc l'intégrale proposée diverge.
- Si $a > 0$, alors $f_a(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, donc l'intégrale proposée diverge.

Exercice 53 : CCINP

1. Comme $f_n(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^{4n}}$ et que $4n \geq 4$ pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc I_n existe. Par ailleurs, la suite numérique de terme général $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^4)^n}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{1+x^4} \in [0, 1[$ pour tout $x > 0$; elle converge donc vers zéro. On en déduit que la suite (f_n) converge vers la fonction indicatrice du singleton $\{0\}$, notée f , continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. On dispose aussi de l'hypothèse de domination :

$$\forall n \geq 1, \quad \forall x \in [0, +\infty[, \quad |f_n(x)| \leq f_1(x),$$

où f_1 est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$. Le théorème de convergence dominée affirme alors que

$$\lim_{+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(x) dx = 0.$$

2. La fonction $\psi: u \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{u} \in]0, +\infty[$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Le théorème de changement de variable dans les intégrales impropres affirme alors que les deux intégrales $\int_{]0, +\infty[} f_1$ et $\int_{]0, +\infty[} f_1 \circ \psi \times |\psi'|$ sont de même nature et, dans le cas de convergence, qu'elles sont égales. Ici, on obtient

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1/u^2}{1 + (1/u^4)} du = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{u^4 + 1} du.$$

Ce n'est pas le résultat attendu, mais on dispose maintenant de deux expressions de I_1 : celle qu'on vient d'obtenir ci-dessus, ainsi que la définition d'origine. En remarquant que $I_1 = \frac{1}{2}(I_1 + I_1)$, et en utilisant ces deux expressions, on obtient

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{u^2 + 1}{u^4 + 1} du.$$

La fonction $\theta: u \in]0, +\infty[\mapsto u - \frac{1}{u} \in \mathbb{R}$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$, car $\theta'(u) = 1 + \frac{1}{u^2} > 0$, $\lim_0 \theta(u) = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \theta(u) = +\infty$. On peut donc effectuer le changement de variable $u = \theta^{-1}(v)$ dans l'intégrale I_1 . Voici quelques calculs préliminaires, où l'on a posé $v = \theta(u) = u - \frac{1}{u}$:

— On a $v^2 = u^2 - 2 + \frac{1}{u^2}$ donc $u^2 v^2 = u^4 + 1 - 2u^2$, donc $u^4 + 1 = u^2(2 + v^2)$.

— Comme $dv = (1 + \frac{1}{u^2})du$, on a $(u^2 + 1)du = u^2 dv$.

Le théorème de changement de variable mène à

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2 dv}{u^2(2 + v^2)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{2 + v^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{v}{\sqrt{2}} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

3. On va établir une relation de récurrence portant sur les intégrales I_n , en écrivant que $1 = 1 + x^4 - x^4$, puis en effectuant une intégration par parties, en dérivant x et en intégrant $\frac{x^3}{(1+x^4)^n}$. On effectue le calcul sur $[0, a]$, puis on fait tendre a vers $+\infty$. Pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{dx}{(1+x^4)^n} &= \int_0^a \frac{1+x^4-x^4}{(1+x^4)^n} dx \\ &= \int_0^a \frac{dx}{(1+x^4)^{n-1}} - \int_0^a x \times \frac{x^3}{(1+x^4)^n} dx \\ &= \int_0^a \frac{dx}{(1+x^4)^{n-1}} - \left[\frac{x}{4(-n+1)(1+x^4)^{n-1}} \right]_0^a + \int_0^a \frac{1}{4(-n+1)(1+x^4)^{n-1}} dx \\ &= \int_0^a \frac{dx}{(1+x^4)^{n-1}} + \frac{a}{4(n-1)(1+a^4)^{n-1}} - \frac{1}{4(n-1)} \int_0^a \frac{dx}{(1+x^4)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Comme $n \geq 2$, le terme central tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$, et on obtient

$$I_n = \left[1 - \frac{1}{4(n-1)} \right] I_{n-1} = \frac{4n-5}{4(n-1)} I_{n-1}.$$

On en déduit que

$$I_n = \frac{(4n-5) \times (4n-9) \times \cdots \times 7 \times 3}{4(n-1) \times 4(n-2) \times \cdots \times 8 \times 4} I_1 = \frac{(4n-5) \times (4n-9) \times \cdots \times 7 \times 3}{4^{n-1}(n-1)!} \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 54 : MP

1. La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité en 0. Le théorème d'intégration par parties appliqué à $f: t \mapsto \frac{1}{t}$ et $g: t \mapsto 1 - \cos t$ qui sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ donne $[f(t)g(t)]_1^{+\infty} = 1 - \cos 1$. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ sont de même nature.

Or $\frac{1 - \cos t}{t^2} = O(\frac{1}{t^2})$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge. Donc, par comparaison par domination de fonctions $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ converge. Donc, par la relation de Chasles, I existe.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t}{\sin t} dt = \int_0^{\pi/2} 2 \cos(2n+2)t dt = 0,$$

donc la suite (v_n) est constante et vaut

$$v_0 = \frac{\pi}{2}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|u_n - v_n| = \left| \int_0^{\pi/2} \sin(2n+1)t \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \right) dt \right|.$$

Or $f: t \in]0, \frac{\pi}{2}] \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$. En effet, elle est prolongeable par continuité en 0 car

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \frac{1}{1 - t^2/6 + o(t^2)} \sim -\frac{t}{6}$$

quand $t \rightarrow 0$, et on peut appliquer le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ car

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2} \frac{1 - O(t^2)}{(1 + O(t^2))^2} = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2} \frac{1 - t^2/2 + o(t^2)}{1 - t^2/3 + o(t^2)} = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2} (1 + O(t^2)) = O(1)$$

possède une limite finie quand $t \rightarrow 0$. Or toute fonction continue sur un segment atteignant ses bornes, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f'(t)| \leq M$. D'où, en intégrant par parties, on a :

$$|u_n - v_n| = \left| \int_0^{\pi/2} \sin(2n+1)t \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \right) dt \right| = \left| \left[-\frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)} f(t) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)} f'(t) dt \right|$$

Or $\left[-\frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)} f(t) \right]_0^{\pi/2} = \frac{f(0)}{(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $|\frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)} f'(t)| \leq \frac{M}{(2n+1)}$, donc $\left| \int_0^{\pi/2} -\frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)} f'(t) dt \right| \leq \frac{M\pi}{2(2n+1)} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, ce qui montre que $|u_n - v_n| \rightarrow 0$.

4. Or $u_n - v_n = u_n - \frac{\pi}{2}$ et $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt \underset{u=(2n+1)t}{=} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I$. Conclusion :

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 55 : Centrale

On pose $h: (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{e^{itx}}{(1+t^2)^2}$ et $k: (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{e^{itx}}{1+t^2}$. Ce sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$. Comme $|h(t)| \leq \frac{1}{(1+t^2)^2}$ et $|k(t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et comme les majorants sont des fonctions intégrables de la variable t (continues sur $\mathbb{R}$ et équivalentes à $\frac{1}{t^4}$ ou $\frac{1}{t^2}$ en $\pm\infty$), les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.

On remarque que la continuité de k et la domination $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, |k(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$ par une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ montrent la continuité de g sur $\mathbb{R}$: voir la question (c) pour l'utilisation de cette remarque.

1. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ avec

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = it \frac{e^{itx}}{(1+t^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = (it)^2 \frac{e^{itx}}{(1+t^2)^2}.$$

Ces dérivées partielles satisfont les hypothèses de domination

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) := \frac{|t|}{(1+t^2)^2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \psi(t) := \frac{t^2}{(1+t^2)^2},$$

où φ et ψ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ (équivalentes à $\frac{1}{|t|^3}$ ou à $\frac{1}{t^2}$ en $\pm\infty$). Le théorème de Leibniz de dérivation des intégrales à paramètres s'applique et prouve que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad f'(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^{itx}}{(1+t^2)^2} dt \quad \text{et} \quad f''(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 e^{itx}}{(1+t^2)^2} dt.$$

2. On ne peut pas faire la même démonstration, car $t \mapsto \frac{\partial^k}{\partial x^k}(x, t)$ n'est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour aucun x réel. On commence donc par transformer l'expression de g par intégration par parties :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \left[\frac{e^{itx}}{ix(1+t^2)} \right]_{t=-\infty}^{+\infty} + \frac{2}{ix} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{itx}}{(1+t^2)^2} dt = \frac{2}{ix} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{itx}}{(1+t^2)^2} dt.$$

On montre alors comme à la question précédente que $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{itx}}{(1+t^2)^2} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et obéit à la formule de Leibniz, et on en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

3. Plutôt que de dériver l'égalité $g(x) = \dots$ ci-dessus, on la réécrit sous la forme $ixg(x) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{itx}}{(1+t^2)^2} dt$, et on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad i(xg'(x) + g(x)) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{it^2 e^{itx}}{(1+t^2)^2} dt.$$

Une intégration par parties (pratiquée sur un segment $[-m, m]$, puis faisant tendre m vers l'infini) consistant à dériver $t \mapsto te^{ixt}$ et à intégrer $t \mapsto \frac{2t}{(1+t^2)^2}$, ainsi que l'identité $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{itx}}{1+t^2} dt = \frac{ix}{2} g(x)$ prouvée début de cette question, conduisent à

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad i(xg'(x) + g(x)) = i \left[-\frac{te^{itx}}{1+t^2} \right]_{t=-\infty}^{+\infty} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+itx)e^{itx}}{1+t^2} dt = i \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) g(x).$$

On en déduit que g est solution, sur $\mathbb{R}^*$, de l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

$$y' + \frac{x}{2}y = 0.$$

Ses solutions sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ ou $I_2 = \mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda_k e^{-x^2/4}$, où λ_k est une constante sur l'intervalle I_k , avec $k = 1$ ou 2 . Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-x^2/4} & \text{si } x < 0 \\ \lambda_2 e^{-x^2/4} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Comme $g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$ et comme on a démontré la continuité de g sur $\mathbb{R}$ dans l'introduction, on en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = \pi$, et finalement que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \pi e^{-x^2/4}.$$

On note que cette expression prouve que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La comparaison de certains calculs des questions (a) et (b) et l'équation différentielle satisfaite par g montrent que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = -\frac{x}{2}g(x) = g'(x).$$

Cette égalité reste vraie en $x = 0$ (par continuité, ou par calcul explicite), et on en déduit l'existence d'une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $f = g + c$. On détermine la valeur de c par le calcul de $f(0)$, effectué au moyen d'une intégration par parties *sur l'expression de $g(0)$* :

$$\begin{aligned} \pi = g(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \left[\frac{t}{1+t^2} \right]_{t=-\infty}^{+\infty} + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 + 1 - 1}{(1+t^2)^2} dt \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = 2\pi - 2f(0). \end{aligned}$$

On en déduit que $f(0) = \frac{\pi}{2}$, donc que $c = -\frac{\pi}{2}$ et finalement que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \pi e^{-x^2/4} - \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 56 : Centrale

1. La fonction $f: t \mapsto e^{-t}t^{s-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$, $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $0 \leq f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-s}}$ donc $\Gamma(s)$ est définie $\iff s > 0$.
2. La fonction

$$g_n: t \mapsto \begin{cases} t^{s-1}(1 - \frac{t}{n})^n & \text{si } 0 < t \leq n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

est continue sur $]0, n]$ et $0 \leq g_n(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-s}}$ donc $I_n(s)$ converge.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) = t^{s-1}e^{-t}$ et $n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -t$ (inégalité de convexité) donc $g_n(t) \leq t^{s-1}e^{-t}$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$. On en déduit avec le théorème de convergence dominée que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(s) = \Gamma(s)$.

3. Par intégration par partie, on obtient $I_n(s) = \frac{1}{s} \int_0^n t^s \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt$, puis par récurrence : $I_n s = \frac{n! n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}$ et on conclut avec la question précédente.

Exercice 57 : Centrale

1. La fonction $g(x, \cdot)$ est continue sur $[1, +\infty[$ et $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2\alpha}}$, donc $g(x, \cdot)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $g(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ pour tout $t \in [1, +\infty[$ avec

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{-2\alpha x}{(t^2 + x^2)^{\alpha+1}},$$

donc $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue sur $[1, +\infty[$ et, pour $x \in [-a, a]$, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leq \frac{2a\alpha}{t^{2(\alpha+1)}}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$. On en déduit avec le théorème de dérivation sous le signe $\int$ que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$f'(x) = -2\alpha x \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + x^2)^{\alpha+1}}.$$

3. Avec le changement de variable $t = ux$ ($x \neq 0$), on obtient

$$f(x) = \frac{1}{x^{2\alpha-1}} \int_{1/x}^{+\infty} \frac{dt}{(1+u^2)^\alpha} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^{2\alpha-1}}\right),$$

donc f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 58 : MP 2025

1. On utilise les sommes de Riemann, ce qui donne $nu_n \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$ donc $u_n \sim \frac{\pi}{4n}$.
2. L'intégrande définit une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ prolongeable par continuité en 0 (équivalente à n) et dominée par $e^{-\frac{t}{2}}$ par exemple au voisinage de $+\infty$. Puis on écrit $I_n = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(nt) e^{-kt} dt$, on applique le théorème d'intégration terme à terme sur $\mathbb{R}^{+*}$ à $f_k : t \mapsto \sin(nt) e^{-kt}$, ces fonctions sont intégrables et $\int_0^{+\infty} |f_k(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} nte^{-kt} dt = \frac{n}{k^2}$ par IPP, terme général d'une série convergente.
Donc $I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_k(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{k^2 + n^2} = nu_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n}{k^2 + n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.
3. On peut montrer que $I_n \rightarrow I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Séries entières

Exercice 59 : Centrale 2025

1. On peut redémontrer que tout suite périodique convergente est constante (et ici $\sin(n\theta)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{\theta}$ mais n'est clairement pas constante ou bien raisonner par l'absurde avec les formules de trigonométrie (si elle converge alors $(\cos(n\theta))$ aussi donc $(e^{in\theta})_n$ aussi ce qui est absurde car $e^i \neq 1$).
2. La suite $(\sin(n\theta))_n$ étant bornée, on a $R \geq 1$ et comme elle diverge, $R \leq 1$ donc $R = 1$.
3. On calcule pour $|x| < 1$, $f(x) = \text{Im}(\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{i\theta} x)^n) = \frac{x \sin(\theta)}{\sqrt{1+x^2-2x \cos \theta}}$ donc $f(x) \rightarrow \cos(\frac{\theta}{2})$.
4. On note f la somme de la série entière, comme les a_n sont positifs, f est croissante donc admet une limite ℓ en 1^- finie ou égale à $+\infty$. Or pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $f(x) \geq \sum_{n=1}^N a_n x^n$ donc par passage à la limite en $1 : \ell \geq \sum_{n=0}^N a_n$, puis on fait $N \rightarrow +\infty$ donc $\ell = +\infty$.

Exercice 60 : MP 2025

1. f est DSE sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2k-1}}{k!}$ donc f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. f est continue et strictement croissante donc définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
3. f est impaire, f^{-1} aussi et $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1$ donc on a $f'^{-1}(x) = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)$ au voisinage de 0. On écrit ensuite $x = f(f^{-1}(x)) = \frac{e^{(x+a_3 x^3+a_5 x^5+o(x^5))^2} - 1}{x}$ puis par unicité des coefficients du DL on trouve $a_3 = -\frac{1}{4}$ et $a_5 = \frac{7}{32}$.

Exercice 61 : MP 2025

1. On a $u_{n+1} - u_n \rightarrow e^{-1}$ donc par Césaro, et par télescope $\frac{u_n}{n} - \frac{1}{n} \rightarrow e^{-1}$ donc $u_n \sim ne^{-1}$.
Donc $R = 1$.
2. Soit $x \in]-1, 1[$. On multiplie l'inégalité de l'énoncé par x^n et on somme pour obtenir :

$$\frac{1}{x}(f(x) - 1) = f(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(1-x)k!}$$

(l'interversion des deux signes somme se justifie avec le cours sur les familles sommables)
donc :

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right)f(x) = \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{1-x}$$

Exercice 62 : CCINP 2021

1. Le rayon vaut 1 (cours)

(a) On a pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq (\tan(t))^n \leq 1$ donc par croissance de l'intégrale, $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{4}$. Comme la série entière $\sum \frac{\pi}{4} x^n$ a pour rayon de convergence 1, on déduit de la majoration que $R \geq 1$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $I_{n+2} + I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^n (1 + \tan^2(t)) dt = \left[\frac{1}{n+1} (\tan(t))^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}$.

2. On a pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\tan(t) \leq 1$ donc par croissance de l'intégrale pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leq I_n$ donc $(I_n)_n$ est décroissante. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2I_{n+2} \leq I_{n+2} + I_n \leq 2I_n$ ce qui donne $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$. Les deux extrémités sont équivalentes à $\frac{1}{2n}$ donc par théorème d'encadrement, $2nI_n \rightarrow 1$ donc $I_n \sim \frac{1}{2n}$. D'après 1., la série entière $\sum I_n x^n$ a donc même rayon de convergence que $\sum \frac{x^n}{n}$ qui vaut 1 donc $R = 1$.

3. La série harmonique diverge donc la série $\sum I_n$ diverge par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs.

$5i_n)_n$ est décroissante et tend vers 0 d'après ce qui précède donc par théorème des séries alternées, $\sum (-1)^n I_n$ converge.

Exercice 63 : CCINP Comme $\cos(\frac{2n\pi}{3})$ vaut 1 si n est multiple 3 et $-\frac{1}{2}$ sinon, on en déduit que $\frac{|x^n|}{2n} \leq \left| \frac{\cos(2n\pi/3)}{n} x^n \right| \leq \frac{|x^n|}{n}$. La série entière de terme général $\frac{x^n}{n}$ ayant un rayon de convergence égal à 1 (c'est une série du cours, dont la somme sur $] -1, 1[$ vaut $-\ln(1-x)$), il en est de même de la série étudiée ici.

On note j le nombre complexe $\exp(\frac{2i\pi}{3})$ et f la somme de la série entière de terme général $\frac{(jx)^n}{n}$, de rayon de convergence 1. On remarque que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n\pi/3)}{n} x^n = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(jx)^n}{n} \right) = \operatorname{Re}(f(x)).$$

Le théorème de dérivation terme à terme affirme que f est dérivable et que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} j^n x^{n-1} = j \sum_{n=0}^{+\infty} (jx)^n = \frac{j}{1-jx} = j \frac{1-\bar{j}x}{(1-jx)(1-\bar{j}x)} = \frac{j-x}{1+x+x^2}.$$

Comme $f(0) = 0$ d'après la définition de f , on en déduit que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n\pi/3)}{n} x^n &= \operatorname{Re} \left(\int_0^x \frac{j-t}{1+t+t^2} dt \right) = - \int_0^x \frac{-\frac{1}{2}-t}{1+t+t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{2t+1}{1+t+t^2} \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1+x+x^2) \end{aligned}$$

Exercice 64 : CCINP Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence est

$$R = 1.$$

On calcule

$$\sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{3n}{n+2} x^n = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \left(3 - \frac{6}{n+2} \right) x^n = 3 \sum_{n \geq 1}^{\infty} x^n - 6 \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}.$$

Or $\sum_{n \geq 1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ et, si $x \neq 0$,

$$\sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n \geq 3}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x^2} \left(-\ln(1-x) - \frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2} \right) = -\frac{\ln(1-x)}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}.$$

On en déduit que

$$\sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{3n}{n+2} x^n = \begin{cases} 3 \frac{x}{1-x} - 6 \left(-\frac{\ln(1-x)}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 65 : Centrale On note R le rayon de convergence de la série entière étudiée et S sa somme sur $] -R, R[$.

1. Une intégration par parties montre que pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, $I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$. Comme pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{p,0} = \frac{1}{p+1}$, une récurrence immédiate (sur q) montre que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n,n} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

2. Pour $x \neq 0$, on pose $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^n$. On vérifie facilement que

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{((n+1)!)^2(2n+1)!}{(n!)^2(2n+3)!} |x| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} |x| = \frac{n+1}{4n+6} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{4}.$$

La règle de d'Alembert montre alors que

$$R = 4.$$

Soient $x \in]-4, 4[$ et $f: t \mapsto xt(1-t)$. On a $\forall t \in [0, 1]$, $|f(t)| \leq |x|f(\frac{1}{2}) = \frac{|x|}{4}$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f^n\|_{\infty; [0;1]} = \left(\frac{|x|}{4} \right)^n.$$

Ce calcul montre que la série de fonctions $\sum f^n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[0; 1]$. Le théorème d'intégration sur un segment des séries de fonctions (continues) permet de conclure que la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 f^n = \sum_{n \geq 0} I_{n,n} x^n$ converge (on le savait déjà grâce à la question précédente) et a pour somme $\int_0^1 F(t)$, où, si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], \quad F(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f^n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n (1-t)^n x^n = \frac{1}{1-xt(1-t)} = \frac{1}{1-xt+xt^2} = \frac{1}{x} \frac{1}{t^2 - t + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x} \frac{1}{(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Pour $x \in]0, 4[$, le dénominateur admet un discriminant strictement négatif donc pas de racines réelles, le changement de variable $u = \frac{t - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{4}}}$ donne alors en notant $a(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{4}}$: $S(x) = \frac{1}{x} \frac{2}{a(x)} \arctan\left(\frac{1}{2\sqrt{a(x)}}\right)$.

Pour $x \in]-4, 0[$, $a(x) < 0$, le dénominateur admet deux racines réelles $\frac{1}{2} \pm \sqrt{-a(x)}$, on décompose la fraction en éléments simples pour obtenir : $S(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\frac{1}{2} + \sqrt{a(x)}}{\frac{1}{2} - \sqrt{a(x)}}\right)$.

Enfin, $S(0) = 1$.

Exercice 66 : Centrale

- $(1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^n$, $R = 1$ (cours).
- Soit $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} = xchx$, $R = +\infty$. D'après le théorème de dérivation terme à terme, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = g(x) = chx + xshx$.

Exercice 67 : IMT

On introduit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$. Alors f a pour rayon de convergence $R = 1$ (utiliser le thm de D'Alembert) et pour $x \in]-1, 1[$, on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n-2}.$$

On en déduit que $f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$. Par conséquent, $f'(x) = \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x))$ et

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{1}{2} ((1+x) \ln(1+x) + (1-x) \ln(1-x)).$$

Pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \in]-1, 1[$, on trouve

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right].$$

D'où la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 68 : Centrale

- Un développement limité donne

$$\begin{aligned} u_n &= \ln \left(\left[1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right] \left[1 + \frac{1}{n} \right]^{-\frac{1}{2}} \right) = \ln \left(\left[1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right] \left[1 - \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \right) \\ &= \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^3 + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{3n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que $|u_n x^n| \sim |x|^n / \sqrt{n}$, donc que la suite de terme général $u_n x^n$ converge vers zéro si $|x| < 1$, et n'est pas bornée si $|x| > 1$. Ceci caractérise le fait que le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n x^n$ vaut 1.

- Si $x = 1$, le développement limité précis établi ci-dessus montre que $\sum u_n x^n$ est la somme de quatre séries numériques : une semi-convergente (de terme général $(-1)^n / \sqrt{n}$), deux absolument convergentes (les deux dernières) et une divergente (de terme général $-\frac{1}{n}$). Par suite, la série diverge en $x = 1$.

Si $x = -1$, le développement limité en question donne

$$u_n x^n = (-1)^n u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{3n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Le même type de raisonnement montre que la série diverge en $x = -1$ aussi.

Equations différentielles, calcul différentiel**Exercice 69 : CCP**

1. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions proportionnelles à l'exponentielle. La méthode de variation de la constante conduit à $k'(x)e^x = e^{-x^2}$, et on choisit $k(x) = u(x) = \int_0^x e^{-t^2-t} dt$. Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions telles que

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = e^x(k + u(x)).$$

2. Les comparaisons usuelles montrent que $t^2 e^{-t^2-t}$ tend vers zéro quand t tend vers $\pm\infty$, donc $t \mapsto e^{-t^2-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par définition, u possède alors des limites finies en $\pm\infty$.
3. Comme $k + u(x)$ admet une limite finie en $-\infty$, alors $y(x) = e^x(k + u(x))$ tend vers zéro quand x tend vers $-\infty$.
4. Pour que $y(x)$ puisse tendre vers zéro quand x tend vers $+\infty$, il faut que $k = -\lim_{+\infty} u(x)$. Dans ce cas

$$|y(x)| = \left| -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t^2-t} dt \right| = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t^2-t} dt \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-t^2-x} dt = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, l'intégrale ci-dessus tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$. Il existe donc bien une (et une seule) solution de (E) de limite nulle en $+\infty$.

5. On pose $v: x \mapsto \int_0^x e^{-t^2+t} dt$. Les solutions de (F) sont les fonctions telles que

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = e^{-x}(k + v(x)).$$

On démontre comme ci-dessus que $t \mapsto e^{-t^2-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, que v admet des limites finies en $\pm\infty$, que toutes les solutions de (F) tendent vers zéro en $+\infty$, et qu'il existe une et une seule solution de (F) de limite nulle en $-\infty$.

Exercice 70 : CCINP

- On trouve aisément que si f est solution générale sur $] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x , $f(x) = \lambda e^{1/x} + 1$.
- Pour les solutions sur $\mathbb{R}$ (il en existe au moins une, la fonction $x \mapsto 1$), on procède par analyse-synthèse

Analyse. Si f est de classe C^1 et solution sur $\mathbb{R}$ alors d'après ce qui précède, il existe λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{1/x} + 1 & \text{si } x < 0, \\ \mu e^{1/x} + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \quad \text{par continuité de } f.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, il vient $\mu = 0$. En revanche $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ quel que soit λ .

Synthèse. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f_λ l'application définie par

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{1/x} + 1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

f_λ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable partout sauf peut-être en 0. Le taux de variation en 0 est donné par :

$$\forall x < 0, \quad \frac{f_\lambda(x) - f_\lambda(0)}{x} = \lambda \frac{e^{1/x}}{x}$$

et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f_\lambda(x) - f_\lambda(0)}{x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t = 0$ donc f_λ est dérivable aussi en 0 avec $f'_\lambda(0) = 0$.

Enfin pour $x > 0$, on a $f'_\lambda(x) = 0$ et pour $x < 0$ $f'_\lambda(x) = -\frac{\lambda}{x^2} e^{1/x} \rightarrow 0 = f'_\lambda(0)$ quand $x \rightarrow 0^-$. Ainsi f_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle considérée.

Conclusion. Il existe une droite affine de solutions sur $\mathbb{R}$. Ce sont les fonctions f_λ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, définies ci-dessus.

Exercice 71 : Centrale

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul et de somme f . Alors f est solution de (*) sur $] -R, R[$ si et seulement si les coefficients a_n vérifient l'une des propositions équivalentes suivantes (la dernière est justifiée par l'unicité du développement en série entière) :

$$\begin{aligned}
\forall x \in] -R, R[, \quad (x^2 - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 3x \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= 0 \\
\iff \forall x \in] -R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= 0 \\
\iff \forall x \in] -R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= 0 \\
\iff \forall x \in] -R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} [-(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n(n-1) + 3n + 1) a_n] x^n &= 0 \\
\iff \forall x \in] -R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} [-(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1)^2 a_n] x^n &= 0 \\
\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n.
\end{aligned}$$

La dernière condition équivaut à $\forall n \geq 2, a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2}$ et on détermine les coefficients en discutant suivant la parité de leurs indices : pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
a_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} a_0 = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} a_0 \\
a_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} a_1 = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} a_1
\end{aligned}$$

Pour qu'une telle solution soit non nulle, il faut que a_0 ou a_1 soit non nulle.

Réciproquement, si $a_0 \neq 0$, la série entière de terme général $u_n = a_{2n} x^{2n}$ a un rayon de convergence égal à 1 car, pour $x \in \mathbb{R}^*$ fixé,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} x^2 = \frac{2n+1}{2n+2} x^2$$

tend vers x^2 quand n tend vers $+\infty$, et on applique la règle de d'Alembert. Il en est de même de la série de terme général $v_n = a_{2n+1} x^{2n+1}$ si $a_1 \neq 0$.

Par conséquent, si a_0 ou a_1 est non nul, la série entière $\sum a_n x^n$, où les coefficients sont donnés par les formules ci-dessus, a un rayon de convergence au moins égal à 1 (en fait égal, mais ce n'est pas demandé), et sa somme f est une fonction non nulle solution de (*) sur $] -1, 1[$:

$$f(x) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} x^{2p} + a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

2. Une intégration par parties montre que, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
W_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cos^{n-1} \theta d\theta = [\sin \theta \cos^{n-1} \theta]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^{n-2} \theta d\theta \\
&= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta) \cos^{n-2} \theta d\theta = (n-1)(W_{n-2} - W_n).
\end{aligned}$$

On en déduit que (W_n) satisfait la même relation de récurrence que (a_n) :

$$\forall n \geq 2, \quad W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}.$$

3. Comme $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$, l'expression de la fonction générique f de la question (a) se met sous la forme suivante :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{2a_0}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} (x \cos \theta)^{2p} d\theta + a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} (x \cos \theta)^{2p+1} d\theta$$

Pour x fixé dans $] -1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n : \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto (x \cos \theta)^n$. La série de fonctions continues $\sum h_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, car $\|h_n\|_\infty = |x|^n$, qui est le terme général d'une série géométrique convergente. On en déduit qu'on peut permuter séries et intégrales dans l'expression de f pour obtenir

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) &= \frac{2a_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sum_{p=0}^{+\infty} (x \cos \theta)^{2p} d\theta + a_1 \int_0^{\pi/2} \sum_{p=0}^{+\infty} (x \cos \theta)^{2p+1} d\theta \\ &= \frac{2a_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - (x \cos \theta)^2} + a_1 \int_0^{\pi/2} \frac{x \cos \theta}{1 - (x \cos \theta)^2} d\theta. \end{aligned}$$

On a ainsi trouvé deux expressions (comme somme de série entière ou comme intégrale) de toutes les solutions de (*) sur $] -1, 1[$. En effet, on sait que, sur un intervalle où le coefficient $x^2 - 1$ de y'' ne s'annule pas, l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 est de dimension 2. Comme les solutions $x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} x^{2p}$ et $x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}$ forment manifestement une famille libre (elles sont toutes deux non nulles et l'une est paire et l'autre impaire), elles forment une base de $\mathcal{S}$.

Exercice 72 : CCINP

- On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ce qui donne l'inégalité voulue.
- (a) D'après 1. le dénominateur de l'expression de f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction rationnelle.
- (b) On a déjà f continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. D'après 1., $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $f(x, y) \leq \frac{2y^4}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$ donc f est continue en $(0, 0)$ si et seulement si $\alpha = 0$.
 - f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par théorèmes généraux et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-y^4(2x - y)}{(x^2 + y^2 - xy)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y^5 - 3xy^4 + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2 - xy)^2}$$

- On a : $\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ et $\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = y \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.
- il faut étudier la continuité des dérivées partielles au point $(0, 0)$, cad montrer qu'elles tendent toutes les deux vers 0 en $(0, 0)$, ce qui peut se faire par majoration ou par un passage en coordonnées polaires. C'est le cas et f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 73 : CCINP On constate pour commencer que $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et que l'égalité est réalisée si et seulement si $x^2 = 1 = e^y$, c'est-à-dire pour les deux points $(\pm 1, 0)$.

Ensuite, comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, ses extrema locaux sont nécessairement atteints en des points critiques. On résout donc

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x[(x^2 - 1) + (x^2 - e^y)] &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -2e^y(x^2 - e^y) &= 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ 2e^{2y} &= 0, \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x^2 - 1 - e^y &= 0 \\ x^2 - e^y &= 0, \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 0, \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x &= -1 \\ y &= 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On trouve uniquement les deux points $(\pm 1, 0)$ prévus plus haut, où f atteint son minimum global. Elle ne possède pas d'autre extremum local.

Exercice 74 : CCINP

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$ donc $\mathcal{C}^1$ et définie sur un ouvert, on cherche ses éventuels extrema parmi ses points critiques :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(f)(x, y) = (0, 0) &\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(y)e^{x \sin(y)} = 0 \\ x \cos(y)e^{x \sin(y)} = 0, \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \sin(y) = 0 \\ x \cos(y) = 0, \end{cases} \iff x = 0 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, y = k\pi. \end{aligned}$$

En effet, si x est non nul, il faut que $\cos(y) = 0$ (deuxième équation), mais alors il est impossible que $\sin(y) = 0$ première équation).

On peut calculer la hessienne de f au point $(0, k\pi)$ pour $k \in \mathbb{Z}$, c'est la matrice de $S_2(\mathbb{R})$ ayant tous ses coefficients égaux à $(-1)^k$, elle admet donc 0 pour valeur propre (car de rang 1) donc n'est pas définie positive. Par le cours, f ne possède pas d'extremum.

Exercice 75 : Centrale Comme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ est un ouvert, les extrema de f sont à chercher parmi ses points critiques. Or

$$\nabla f(x, y) = (2xy, x^2 + \ln^2 y + 2 \ln y)$$

donc $\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff x = 0$ et $\ln(y)(\ln(y) + 2) = 0 \iff x = 0$ et $y \in \{1, e^{-2}\}$.

— Nature du point critique $(0, 1)$. On a $f(0, 1) = 0$ et $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^*$ (l'inégalité est stricte si $(x, y) \neq (0, 1)$). Donc $(0, 1)$ est un minimum (strict) global.

— Nature du point critique $(0, e^{-2})$. On a $f(0, e^{-2}) = 4e^{-2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x, e^{-2}) = e^{-2}(x^2 + 4) \geq 4e^{-2}$, avec inégalité stricte si $x \neq 0$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(0, y) = y \ln^2 y$, et une étude de la fonction $g : y \mapsto y \ln^2(y)$ montre que g présente un maximum (strict) local en e^{-2} . Autrement dit, $f(x, y) \leq 4e^{-2}$ pour y voisin de e^{-2} (avec inégalité stricte si $y \neq e^{-2}$).

Donc le point critique $(0, e^{-2})$ n'est pas un extremum local (donc pas global).

Exercice 76 : Centrale

On fixe $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, elle admet un développement limité d'ordre 1 en a de la forme $f(a + h) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + o(h)$, et si on applique l'inégalité $|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^2$ avec $x = a + h$ et $y = 0$, on obtient

$$\forall h_1 \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + o(h_1) \right| \leq h_1^2.$$

En divisant par $h_1 \neq 0$, puis en faisant tendre h_1 vers zéro par valeurs différentes de zéro, on obtient $|\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)| \leq 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0$.

Il s'ensuit que f est constante sur toute droite du plan parallèle à Ox . On montre que même qu'elle est constante sur toute droite parallèle à Oy et, finalement, qu'elle est constante sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 78 : Centrale Notons r la fonction $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. On a :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \times f'(r) = \frac{x_i}{r} \times f'(r)$$

donc

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = \left(\frac{x_i}{r}\right)^2 \times f''(r) + \left(\frac{1}{r} + x_i \left(-\frac{x_i}{r^2}\right)\right) \times f'(r) = \frac{x_i^2}{r^2} \times f''(r) + \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \times f'(r)$$

Alors $\Delta F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = (\sum_{i=1}^n x_i^2) \times \frac{f''(r)}{r^2} + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{x_i^2}{r^2}\right) \times f'(r) = f''(r) + \frac{1}{r}(n-1)f'(r)$ et

$$\Delta F = 0 \iff \forall r > 0, \quad f''(r) + \frac{1}{r}(n-1)f'(r) = 0$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall r > 0, \quad f'(r) = \frac{\lambda}{r^{n-1}}$$

$$\iff \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x > 0, \quad f(x) = \frac{A}{x^{n-2}} + B \quad (\text{si } n \geq 3)$$

REMARQUE. — Le cas particulier $n = 2$ donne $f(x) = A \ln x + B$.

Exercice 79 : Centrale On effectue le changement de variable

$$\begin{cases} u = ax + y \\ v = bx + y \end{cases}$$

avec $a \neq b$: $g(u, v) = f(x, y)$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= a^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2ab \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + b^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= a \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (a+b) \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + b \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}, \end{aligned}$$

d'où $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (a^2 - 4a - 3) \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (2ab - 4(a+b) - 6) \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + (b^2 - 4b - 3) \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

En prenant pour (a, b) les racines de $X^2 - 4X - 3$, l'équation devient $-28 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ qui s'intègre en $g(u, v) = F_1(u) + F_2(v)$ soit $f(x, y) = F_1(ax + y) + F_2(bx + y)$ où (F_1, F_2) est un couple de fonctions $\mathcal{C}^2$ arbitraire.

Exercice 80 : CCINP

On définit la fonction $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto xyz - 1$, de sorte que (S) soit la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$.

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = (yz, xz, xy).$$

Le vecteur gradient étant non nul sur (S) , il dirige la normale au plan tangent à (S) en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, qui a donc pour équation

$$y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y_0) + y_0 z_0 (z - z_0) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 3.$$

2. La droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0)$ intersecte (P) en le projeté orthogonal H de O sur (P) . Les points de cette droite vectorielle sont ceux de la forme $\lambda(x_0^{-1}, y_0^{-1}, z_0^{-1})$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Un tel point appartient à (P) si et seulement si $\lambda(x_0^{-2} + y_0^{-2} + z_0^{-2}) = 3$, ou encore $\lambda = \lambda_0 := 3(x_0^{-2} + y_0^{-2} + z_0^{-2})^{-1}$. La distance de O à (P) vaut

$$\|\lambda_0(x_0^{-1}, y_0^{-1}, z_0^{-1})\| = |\lambda_0|(x_0^{-2} + y_0^{-2} + z_0^{-2})^{1/2} = 3(x_0^{-2} + y_0^{-2} + z_0^{-2})^{-1/2} = \frac{3}{\sqrt{(y_0 z_0)^2 + (x_0 z_0)^2 + (x_0 y_0)^2}}.$$

Exercice 81 : Centrale

1. Notons $\Gamma_a = S \cap \{x = a\}$. On trouve aisément que :

- $\Gamma_a = \emptyset$ dès que $|x| > 1$.
- Γ_{-1} est la droite D_1 : $x = -1, z = 0$.
- Γ_1 est la droite D_2 : $x = 1, y = 0$.
- Γ_0 est la réunion des droites sécantes D_3 : $x = 0, z = y$ et D_4 : $x = 0, z = -y$

- Si $a \in]-1, 0[\cup]0, 1[$ alors Γ_a est l'hyperbole (non équilatère) d'équation réduite $\frac{y^2}{(1-a)/a} - \frac{z^2}{((1+a)/a)} = 1$.
2. La question précédente répond en partie à cette question en donnant les droites parallèles au plan (yOz) incluses dans (S) . Les autres droites admettent une paramétrisation par x :

$$D \quad \begin{cases} y &= ax + p, \\ z &= bx + q, \end{cases}$$

et alors $D \subset S \iff \forall x \in \mathbb{R} x(x+1)(x-1) + (x+1)(ax+p)^2 + (x-1)(bx+q)^2 = 0$.

Cette condition est impossible puisqu'elle oblige (coefficient de x^3) $1 + a^2 + b^2 = 0$.

Conclusion : Il existe exactement 4 droites incluses dans S , celles trouvées en **a**) : D_1, D_2, D_3 , et D_4 .

3. Une simple étude de cas montre que le système $\begin{cases} \nabla f(x, y, z) &= 0, \\ f(x, y, z) &= 0 \end{cases}$ n'a pas de solution.

Exercice 82 : MP 2024