

## Préparation des oraux - exercices Centrale Python

**Exercice 1 :** Soit  $n$  un entier naturel. On considère la matrice  $A_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  telle que  $a_{j-1,j} = j - 1$ ,  $a_{j+1,j} = n - (j - 1)$  pour tout  $j$  et dont tous les autres coefficients sont nuls.

- Ecrire une fonction Python qui prend un entier  $n$  en argument et renvoie  $A_{n+1}$ .
- Déterminer avec Python les valeurs propres de  $A_{n+1}$ . Que peut-on conjecturer ?
- Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  canoniquement associé à la matrice  $A_{n+1}$ . Montrer qu'il existe un polynôme  $Q$  ne dépendant pas de  $n$  tel que  $u(P) = QP' + nXP$  pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ .
- En déduire les éléments propres de  $u$ .
- La matrice  $A_{n+1}$  est-elle diagonalisable ?

**Exercice 2 :** Soit  $G \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme de degré  $n + 1$ , scindé sur  $\mathbb{R}$  et à racines simples. On définit  $g$  l'application de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$  qui au polynôme  $P$  associe le reste de la division euclidienne de  $XP$  par  $G$ .

- Montrer que  $g$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- Dans cette question  $n = 3$  et  $G = X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X = X(X - 1)(X + 1)(X + 2)$ .
  - Donner la matrice de  $g$  dans la base canonique.
  - $g$  est-elle diagonalisable ?
  - Tracer sur  $[-3, 2]$  les fonctions polynomiales associées aux vecteurs propres de  $g$ .
- On revient au cas général. L'application est-elle diagonalisable ?

**Exercice 3 :** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $P_n(x) = x \prod_{k=1}^n (1 - \frac{x}{k})$ .

- Définir une fonction `P(n,x)` qui renvoie la valeur de  $P_n(x)$ .
  - Tracer les graphes des  $P_n(x)$  pour  $x \in [0, 1]$  et  $n$  variant de 1 à 10. Qu'observe-t-on ?
  - Définir une fonction `M(n)` qui renvoie l'abscisse  $x_n$  du maximum de  $P_n$  sur  $[0, 1]$ . Pour  $k$  allant de 1 à 5, afficher  $x_n \ln(n)$  avec  $n = 10^k$ . Qu'observe-t-on ?
- Montrer que  $P_n$  admet un maximum sur  $[0, 1]$ , atteint en un unique point noté  $x_n$ .
  - En considérant  $x \mapsto \ln(P_n(x))$ , montrer que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{1 - x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ .
  - Trouver un équivalent de  $x_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.

**Exercice 4 :** On note  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{\omega^n}{n}$  et  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ .

- La suite  $(S_n)$  semble-t-elle converger ? Si oui, donner une approximation de sa limite  $S$ .
- Soit  $I = \int_0^1 \frac{\omega - t}{1 + t + t^2} dt$ . Justifier l'existence de  $I$ . Par la méthode des rectangles, trouver une valeur approchée de  $I$ .
- Comparer  $I$  à  $S$ , que peut-on conjecturer ? Démontrer cette conjecture.
- Donner la valeur exacte de  $I$ .
- On considère une suite complexe  $(a_n)_{n \geq 1}$  3-périodique. On pose alors  $u_n = \frac{a_n}{n}$ . Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ .

**Exercice 5 :** Une urne contient  $n$  boules dont  $p$  blanches et  $n - p$  rouges. On tire ces  $n$  boules successivement et sans remise. Soit  $X_i$  la variable qui vaut 1 si on a un changement de couleur entre la  $i$ -ième et la  $(i + 1)$ -ième boule tirée. On note  $N$  le nombre de changements de couleur.

- Ecrire un programme prenant  $n$  et  $p$  en arguments et qui renvoie le nombre de changements de couleur. On pourra s'aider de la fonction `permutation` de `np.random`.
- Donner la loi de  $X_i$ .
  - Calculer  $E = E(N)$ .
  - Pour  $n = 26$ , tracer sur un même graphique les courbes de  $E$  simulées et de  $E$  théorique en fonction de  $p$ .
- Calculer  $V(N)$ .

**Exercice 6 :** Soit  $p \in [0, 1]$ . On s'intéresse à une particule pouvant occuper quatre positions, les points d'abscisses 0, 1, 2, 3, aux instants  $t = n$  où  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que :

- 0 et 3 sont des puits : si la particule s'y trouve, elle y reste à tous les instants suivants ;
- si la particule est en 1, alors elle saute à la position 0 à l'instant suivant avec la probabilité  $p$  ou à la position 2 avec probabilité  $1 - p$  ;

- si la particule est en 2, alors elle saute en 1 avec la probabilité  $p$  ou en 3 avec la probabilité  $1 - p$ .

A l'instant  $t = 0$ , la particule est en 1.

a. i. Écrire un programme Python saut prenant en arguments le paramètre  $p$  et une position et retournant la position de la particule à l'instant suivant.

ii. Écrire un programme Python position qui retourne la position de la particule au bout de 100 sauts. Le tester avec  $p = 0,3$ ;  $p = 0,5$  et  $p = 0,7$ .

iii. Écrire un programme Python histogramme d'arguments  $p$ ,  $n$  et  $N$  indiquant le nombre de fois où la particule a occupé chaque position en  $n$  sauts lors de  $N$  simulations. Le tester avec  $n = 10$ ,  $N = 100$  et  $p = 0,3$ ;  $p = 0,5$  et  $p = 0,7$ .

b. On note  $x_n$  la position de la particule à l'instant  $n$  et  $X_n = \begin{pmatrix} P(x_n = 0) \\ P(x_n = 1) \\ P(x_n = 2) \\ P(x_n = 3) \end{pmatrix}$ .

i. Montrer qu'il existe une matrice carrée  $A$  indépendante de  $n$  telle que, pour tout  $n$ ,  $X_{n+1} = AX_n$ .

ii. Montrer que  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $0 < p < 1$ .

iii. Déterminer les valeurs propres de  $A$  lorsque  $p = 0,5$  puis déterminer la limite de  $X_n$ .

**Exercice 7 :** Soit  $N \in \mathbb{N}$  avec  $N > 2$ . Soit  $(U_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant une loi uniforme sur  $\{1, \dots, N\}$ . On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = U_1 + \dots + U_n$ .

a. Calculer  $E(U_1)$ . Donner la fonction génératrice  $G_1$  de  $U_1$ .

b. Exprimer la fonction génératrice  $G_n$  de  $S_n$  en fonction de  $G_1$ .

c. Déterminer avec Python les coefficients de  $P = \left( \sum_{i=1}^4 X^i \right)^3$ .

d. Soit  $f \in \mathcal{C}^1([1, N], \mathbb{R})$ . On pose  $u_n(f) = E(f(\frac{S_n}{n}))$ .

i. Écrire une fonction Python ayant pour variables d'entrée  $f$  et  $n$  représentant  $u_k(f)$  pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

ii. Tester la fonction précédente pour  $f_\alpha : t \mapsto t^\alpha$  avec  $\alpha \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\}$ . Conjecture ?

e. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle ayant un moment d'ordre deux. Comparer  $E(X^2)$  et  $E(X)^2$ .

f. Soit  $f \in \mathcal{C}^1([1, N], \mathbb{R})$ . Montrer que  $f$  est lipschitzienne. Conclure quant à la conjecture de d.

**Exercice 8 :** On pose  $\varphi(x) = x^4 \sin(\frac{1}{x^3})$  pour  $x \neq 0$  et  $\varphi(0) = 0$ .

a. Soit  $y$  une solution sur  $\mathbb{R}^+$  de l'équation différentielle  $(E) : xy' + 3y = \varphi(x)$ . Montrer que  $y'(0)$  est nécessairement nulle. Tracer à l'aide de la méthode d'Euler  $y$  sur  $[0, 2]$ .

b. On pose  $f(x) = x^6 \sin(\frac{1}{x^3})$  pour  $x \neq 0$ , avec  $f(0) = 0$ . Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , tracer  $f$  sur  $[-1, 1]$ . Vérifier que  $G(x) = \frac{1}{x^3} \int_0^x f(t) dt$  est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 9 :** Pour  $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose  $I(p, q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx$  et  $S(p, q) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nq+p}$ .

a. Justifier l'existence des quantités précédentes.

b. Écrire un programme permettant le calcul de  $I(p, q)$  à  $10^{-5}$  près.

c. Écrire un programme permettant le calcul de  $S(p, q)$  à  $10^{-5}$  près.

d. Calculer informatiquement  $I(1, 2)$ ,  $I(2, 2)$ ,  $I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

e. Tracer les graphes sur  $]0, 1[$  de  $x \mapsto I(\frac{1}{x}, \frac{1}{x})$  et  $x \mapsto S((\frac{1}{x}, \frac{1}{x}))$ .

f. Expliciter  $I(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

g. Calculer  $I(p, q)$  et  $S(p, q)$  pour  $(p, q) \in \{(1, 2), (2, 2)\}$ . Que conjecture-t-on ?

h. Démontrer que  $I(p, q) = S(p, q)$  pour  $p, q \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 10 :** On note  $H_n$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à coefficients dans  $\{-1, 1\}$  dont les colonnes sont orthogonales pour le produit scalaire canonique, et  $SH_n$  l'ensemble des matrices symétriques de  $H_n$ .

a. Donner une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . La programmer en Python.

b. Soit  $A$  une matrice à coefficients dans  $\{-1, 1\}$ . Montrer que  $A$  appartient à  $H_n$  si et seulement si  $AA^T = nI_n$ .

c. i. Que fait la commande Python : `[[x, y] for x in [0, 1] for y in [0, 1]]` ?

ii. Écrire une suite d'instructions en Python qui donne l'ensemble des matrices de  $H_4$ . Quel est le cardinal de  $H_4$  ?

iii. Même question avec  $SH_4$ .

d. Trouver avec Python  $E = \{\text{tr}(A) \mid A \in SH_4\}$ . Le démontrer sans Python.

**Exercice 11 :** Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [-1, 1]$ , on pose  $\theta_n(x) = \prod_{k=0}^n (1 - x^{2^k})$ .

- Créer une fonction **dessin(n)** qui trace les graphes des  $\theta_k$  sur  $[-1, 1]$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .
- Établir la convergence sur  $] -1, 1[$  de la suite  $(\theta_n)$  vers une fonction  $\theta$ ; montrer que  $\theta$  est continue sur  $] -1, 1[$ , vérifie  $\theta(x) = (1 - x)\theta(x^2)$  pour tout  $x \in ] -1, 1[$  et ne s'annule pas sur  $] -1, 1[$ .
- Trouver toutes les fonctions  $f$  continues de  $] -1, 1[$  dans  $\mathbb{R}$  qui vérifient  $\forall x \in ] -1, 1[, f(x) = (1 - x)f(x^2)$ .
- On admet que  $\theta$  est développable en série entière :  $\theta(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ . Donner  $a_0$  et montrer que  $a_{2n} = a_n$  et  $a_{2n+1} = -a_n$  pour tout  $n$ .
- Créer une fonction **coeff(n)** qui calcule  $a_n$ .

**Exercice 12 :** Soit  $E = \{f \in C^0([0, 1]) \mid f(0) = 0, f(1) = 1\}$ . Pour toute fonction  $f \in E$ , on définit  $g = \varphi(f)$  par :  $g(x) = f(3x)/2$  si  $0 \leq x \leq 1/3$ ,  $g(x) = 1/2$  si  $1/3 < x < 2/3$  et  $g(x) = \frac{1}{2}(1 + f(3x - 2))$  si  $2/3 \leq x \leq 1$ .

- Montrer que  $g \in E$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varphi^n(f) \in E$  (où  $\varphi^n = \varphi \circ \dots \circ \varphi$ ).
- i) Écrire une fonction en python qui renvoie  $\varphi(f)$ .
- ii) Écrire une fonction **iter** ( $n, f$ ) qui renvoie  $\varphi^n(f)$ .
- iii) Tracer les courbes des fonctions  $\varphi^n(f)$  pour les premières valeurs de  $n$  et  $f : x \mapsto x$ .
- iv) Même question avec  $f : x \mapsto \sin(\pi x/2)^2$ . Que peut-on remarquer?
- Montrer que  $\varphi$  est  $1/2$ -lipschitzienne.
- Montrer que la série  $\sum (\varphi^{n+1}(f) - \varphi^n(f))$  est normalement convergente. En déduire la convergence uniforme de la suite  $(\varphi^n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
- Montrer que la limite de cette suite ne dépend pas de la fonction  $f$ . On la note  $f_\infty$ .
- Montrer que  $f_\infty$  est l'unique fonction de  $E$  qui vérifie  $\varphi(f_\infty) = f_\infty$ .

**Exercice 13 :** On dispose d'une urne avec des boules numérotées de 1 à  $n$ . On tire une boule au hasard et on enlève les boules de numéro plus grand (au sens large). On note  $X_n$  le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.

- Ecrire une fonction **experience**( $n$ ) qui simule  $X_n$ .
- Ecrire une fonction **moyenne**( $n$ ) de calcul de  $\mathbb{E}(X_n)$  (on répétera 100 n fois l'expérience).
- Avec Python, calculer  $\frac{\mathbb{E}(X_n)}{\ln(n)}$  pour  $n = 100, 500, 1000$ . Conjecture?
- Déterminer loi, espérance et variance de  $X_2$ .
- Déterminer loi, espérance et variance de  $X_3$ .
- Préciser  $X_n(\Omega)$  et calculer  $\mathbb{P}(X_n = 1)$  ainsi que  $\mathbb{P}(X_n = n)$ .
- Montrer que

$$\forall k \geq 2, \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \mathbb{P}(X_{i-1} = k - 1)$$

- Montrer que

$$\mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_i)$$

- Donner un équivalent de  $\mathbb{E}(X_n)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 14 :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ .

- A l'aide de Python, écrire un fonction **logistic**( $n$ ) qui pour un entier  $n$  renvoie  $u_n$ . Conjecturer la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  notée  $l$ .
- Conjecturer un équivalent de  $x_n = u_n - l$ .
- Montrer la conjecture de la question 1.
- Démontrer le théorème de Césaro.
- A l'aide du théorème de Césaro donner un équivalent de  $\ln(u_n)$ .
- A l'aide de Python conjecturer la nature de  $\sum u_n$  puis le démontrer.
- Justifier qu'il existe  $A > 0$  tel que  $u_n \sim \frac{A}{2^n}$ .

**Exercice 15 :** On dit que  $P$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}_n$  quand " $P \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket : P(k) = \frac{k}{k+1}$ "

1. (a) Déterminer un polynôme  $P$  qui vérifie  $\mathcal{P}_n$  pour  $n = 1$  et  $n = 2$ .  
 (b) Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P_n$  vérifiant  $\mathcal{P}_n$ .
2. On pose  $R_n = (n+1)!P_n$ .  
 (a) Déterminer les premières expressions de  $P_n$   
 (b) Tracer  $R_n$  pour  $n \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$  sur  $[-2; 8]$ .  
 (c) Conjecturer une expression de  $P_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$   
 (d) Démontrer cette conjecture

**Exercice 16 : (MP)** a) Soit  $G$  un groupe de cardinal  $n$ . Montrer que  $G$  est cyclique si et seulement s'il existe un élément de  $G$  d'ordre  $n$ .

b) Écrire une fonction calculant le pgcd de deux entiers  $a$  et  $b$ , puis une fonction déterminant le nombre de générateurs de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  lorsque  $p$  est un nombre premier.

c) Si  $p$  est un nombre premier et  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ , déterminer le cardinal de  $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$ .

d) Soit  $p$  un nombre premier.

Montrer, par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$ , que  $(p+1)^{p^k} \equiv 1 + p^{k+1} [p^{k+2}]$ .

**Exercice 17 :** On définit une suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes par les conditions :

$$A_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, A'_{n+1} = A_n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 A_{n+1}(x) dx = 0.$$

a) Déterminer  $A_1, A_2, A_3$ . Écrire un code qui calcule  $A_n$  (utiliser **numpy.polynomial**).

b) Comparer pour plusieurs valeurs de  $n : A_n(0)$  et  $A_n(1)$ ;  $A_n(X)$  et  $A_n(1-X)$ . Tracer  $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$  et

$x \mapsto \sum_{k=0}^{10} A_k(0)x^k$ . Émettre des conjectures.

c) Démontrer les conjectures émises.

**Exercice 18 :** Une suite réelle  $(u_n)_{n \geq 1}$  est dite équirépartie modulo 1 lorsque, pour tous  $a, b$  réels tels que  $0 \leq a \leq b < 1$ , on a

$$\frac{1}{n} \text{Card} \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \{u_k\} \in [a, b]\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b - a$$

où  $\{x\} := x - [x]$  désigne la partie fractionnaire de  $x$ .

a) i) Définir une fonction  $c(u, n, a, b)$  qui calcule :

$$C_n(a, b) = \text{Card} \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \{u_k\} \in [a, b]\}.$$

ii) Afficher les 500 premiers termes de  $C_n(a, b)$  lorsque  $u_n = \sqrt{n}$  pour  $a = 0$  et  $b = 1/2$ , puis pour d'autres couples  $(a, b)$ .

Formuler une conjecture.

iii) Idem avec  $u_n = \ln n$ , puis avec  $u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ .

b) On prend  $u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ . Trouver une suite  $v$  tendant vers 0 telle que  $u+v$  soit à valeurs entières. En déduire que  $u$  n'est pas équirépartie modulo 1.

c) On pose  $u_n = \sqrt{n}$ . On fixe  $a, b$  dans  $[0, 1[$  tels que  $a \leq b$ .

i) Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrer que  $\{u_k\} \in [a, b]$  si et seulement s'il existe un entier  $p$  tel que  $(p+a)^2 \leq k \leq (p+b)^2$ .

ii) En déduire un encadrement de  $C_n(a, b)$  à l'aide de  $\sum_{p=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} (b^2 - a^2 + 2p(b-a))$ .

iii) Montrer que  $(u_n)$  est équirépartie modulo 1.

d) La suite  $(\ln n)$  est-elle équirépartie modulo 1 ?

**Exercice 19 : (MP)** On note  $\mathcal{S}_n$  le groupe des permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Pour  $G$  un groupe fini, on pose

$$p_G = \frac{|\{(x, y) \in G^2, xy = yx\}|}{|G \times G|} \text{ et, pour } x \in G, p_x = \frac{|\{y \in G, xy = yx\}|}{|G|}.$$

On dit que  $x$  est conjugué à  $y$  dans  $G$  s'il existe  $z \in G$  tel que  $y = zxz^{-1}$ . On admet que cela définit une relation d'équivalence sur  $G$ . On note  $N_G$  le nombre de classes d'équivalence pour cette relation.

a) Soit  $c = (a_1 \cdots a_r)$  un  $r$ -cycle de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Pour  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , montrer que  $\sigma c \sigma^{-1}$  est un  $r$ -cycle que l'on déterminera.

b) Coder une fonction donnant une permutation aléatoire de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Coder une fonction qui approxime  $p_{\mathcal{S}}$ , et tracer  $p_{\mathcal{S}_n}$  pour  $n \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ .

c) Justifier les valeurs de  $p_{\mathcal{S}_1}, p_{\mathcal{S}_2}$  et  $p_{\mathcal{S}_3}$ .

d) i) Soient  $x$  et  $y$  conjugués. Montrer que  $p_x = p_y$ .

ii) Soient  $x$  et  $y$  conjugués. Montrer que  $|\{s \in G, y = sxs^{-1}\}| = |\{t \in G, tx = xt\}|$ .

iii) Montrer que  $p_G = \frac{N_G}{|G|}$ .

**Exercice 20 : (MP)** On appelle permutation alternante une permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, (\sigma(i+1) - \sigma(i)) \times (-1)^{i+1} > 0.$$

a) Déterminer l'ensemble des permutations alternantes pour  $n = 2, n = 3, n = 4$ .

b) Écrire une fonction alternante renvoyant, pour une permutation donnée, True si elle est alternante, False sinon.

**Exercice 21 : (MP)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , on note  $M_\sigma$  le nombre d'éléments  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $\sigma(i)$  soit strictement supérieur à tous les  $\sigma(k)$ , pour  $k < i$ .

Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $M(i, n)$  le nombre de permutations de  $\mathcal{S}_n$  telles que  $M_\sigma = i$ .

a) Écrire une fonction qui prend en argument une liste de réels distincts et qui retourne le nombre d'éléments de la liste strictement plus grands que tous les précédents.

b) Écrire une fonction qui retourne  $M(i, n)$ . On pourra utiliser la fonction `itertools.permutations`.

Comment pourrait-on estimer  $M(i, n)$  pour de grandes valeurs de  $n$  ?

c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

i) Calculer  $M(1, n)$  et  $M(n, n)$ .

ii) Montrer que, pour tout  $i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ ,  $M(i, n) = M(i-1, n-1) + (n-1)M(i, n-1)$ . On admet que la quantité  $M(i, n)$  définie pour les permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est inchangée si l'on considère les permutations d'une partie quelconque de  $\mathbb{N}$  de cardinal  $n$ .

Pour la suite, on pose  $M(0, 0) = 1$  et  $M(0, n) = 0$  si  $n \in \mathbb{N}^*$  de telle sorte que la relation (\*) reste vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

d) On définit la matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  par  $a_{i,j} = (-1)^{j-i} M(j, i)$ .

i) Écrire une fonction `A(n)` qui renvoie  $A$  de taille  $n$ . Afficher `A(6)`.

ii) Montrer que  $A$  est inversible.

iii) Pour  $k, p \leq n$ , on définit la quantité  $B(k, p) = \sum_{j=0}^p \binom{p}{k} k! (A^{-1})_{kj}$ . Conjecturer le comportement de  $B(k, p)$ .

e) On définit  $P_k = \sum_{j=0}^n a_{kj} x$ .

i) Exprimer  $P_k$  en fonction de  $P_{k-1}$  et en déduire une expression factorisée de  $P_k$ .

ii) Exprimer  $X^k$  à l'aide de  $P_0, \dots, P_n$  et des coefficients de  $A^{-1}$ .

iii) En déduire une démonstration de la conjecture sur  $B(k, p)$ .

f) Montrer que le nombre moyen de  $M_\sigma$ , pour  $\sigma$  parcourant  $\mathcal{S}_n$  est  $m_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$ .

On pourra introduire  $P'_n$ .

**Exercice 22 :** Soit  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

a) On suppose que les  $X_k$  suivent la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . Dans les calculs avec Python, on prendra  $p = 0,25$  et  $n = 100$ .

i) Quelle loi suit  $S_n$  ?

ii) Pour tout  $t \in \mathbf{R}^+$ , on note  $u(t) = P(|S_n - E(S_n)| \geq t\sqrt{n})$ , ainsi que  $\phi_1(t) = \frac{1}{4t^2}$  et  $\phi_2(t) = 2e^{-2t}$ . Coder une fonction qui calcule  $u$  et tracer sur une même figure les graphes de  $u$ ,  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sur  $[0, 3]$ . Conjecture ?

b) Soit  $s \in \mathbf{R}^+$ .

i) Soient  $c < d$  et  $y \in [c, d]$ . Montrer que  $e^{sy} \leq \frac{y-c}{d-c}e^{sd} + \frac{d-y}{d-c}e^{sc}$ .

Montrer que  $\ln \left( \frac{d}{d-c}e^{sc} - \frac{c}{d-c}e^{sd} \right) \leq \frac{s^2(d-c)^2}{8}$ .

ii) Soit  $Y$  une variable aléatoire centrée à valeurs dans  $[c, d]$ .

Montrer que  $\ln(E(e^{sY})) \leq \frac{s^2(d-c)^2}{8}$ .

c) Soit  $\varepsilon > 0$ . On suppose les  $X_k$  à valeurs dans  $[a, b]$ .

i) Montrer que  $P(S_n - E(S_n) \geq \varepsilon) \leq e^{-s\varepsilon} \prod_{k=1}^n E(e^{s(X_k - E(X_k))})$ .

ii) Montrer que  $P(S_n - E(S_n) \geq \varepsilon) \leq \exp \left( -s\varepsilon + n \frac{s^2(b-a)^2}{8} \right)$ .

iii) Montrer que  $P(S_n - E(S_n) \geq \varepsilon) \leq \exp \left( -\frac{2\varepsilon^2}{n(b-a)^2} \right)$  puis que :

$$P(S_n - E(S_n) \geq t\sqrt{n}) \leq \exp \left( -\frac{2t^2}{(b-a)^2} \right)$$

d) On revient au cas particulier de la première question. Donner une inégalité entre  $u$  et  $\phi_2$ . Comment obtenir une inégalité entre  $u$  et  $\phi_1$ . Laquelle de ces deux inégalités est la meilleure ?

**Exercice 23 : (MP)** On dit que  $x \in \mathbb{R}^+$  est  $\mu$ -approchable (avec  $\mu \in \mathbb{R}$ ) s'il existe une constante  $c > 0$ , et une infinité de rationnels  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$  tels que  $\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{c}{q^\mu}$ . On note  $\mu(x)$  la borne supérieure de l'ensemble des réels vérifiant l'assertion ci-dessus pour ce  $x$ , quitte à ce que ce soit  $+\infty$ .

Un nombre réel positif  $x$  est dit algébrique d'ordre  $n$  s'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{Z}[X]$  de degré  $n$  tel que  $P(x) = 0$  et que pour tout polynôme  $Q \in \mathbb{Z}[X]$  de degré inférieur strictement à  $n$ ,  $Q(x) \neq 0$ . Un nombre transcendant est un nombre qui n'est pas algébrique.

On cherche à montrer le théorème suivant : Si  $x$  est algébrique d'ordre  $n$  alors  $\mu(x) \leq n$ .

a) i) Écrire une fonction Python fibonacci qui a un entier  $n$  associe  $F_n$  la  $n$ -ième valeur de la suite de Fibonacci définie par  $F_0 = F_1 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ . Que vaut  $F_{200}$  ?

ii) Écrire une fonction **test\_approximation** qui à  $(x, p, q, c, n)$  associe True si  $\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{c}{q^\mu}$  et False sinon.

iii) Vérifier que :  $\forall 1 \leq n \leq 12, \left| \varphi - \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}F_{2n-1}^2}$ .

iv) Écrire une fonction **meilleure\_approximation** qui à  $x, n$  associe  $(p, q)$ , où  $\frac{p}{q}$  est la meilleure approximation de  $x$  par un rationnel dont  $q$  possède  $n$  chiffres exactement.

b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que, pour tout entier  $q$ , il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que :  $|qx - p| \leq 1$ . En déduire que  $\mu(x) \geq 1$ . c) Soient  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{p}{q}$  des rationnels distincts.

i) Montrer que  $\left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{bq}$ .

ii) En déduire que  $\mu(x) = 1$  pour tout rationnel  $x$ .

d) Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est au plus dénombrable. Déduire qu'il existe au moins un nombre transcendant. Ind. On rappelle que, si  $\phi$  est une surjection de  $A$  (dénombrable) dans  $B$ , alors  $B$  est au plus dénombrable.

e) Soient  $x$  un nombre algébrique d'ordre  $n$ ,  $P$  un polynôme de  $\mathbb{Z}_n[X]$  tel que  $P(x) = 0$ ,  $M = \sup_{x \in \{0, \dots, n\}} \left| \frac{a_0}{a_n} \right|$ .

i) Montrer que  $P$  ne possède pas de racine de module supérieur à  $1 + M$ .

ii) Montrer le théorème.

f) Montrer que le nombre  $N = \sum_{n=0}^{+\infty} 10^{-n!}$  est transcendant.

**Exercice 24 : (MP)** On dit que  $a$  est algébrique s'il existe  $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$  tel que  $P(a) = 0$ . On pose  $I(a) = \{p \in \mathbb{Q}[X], P(a) = 0\}$ .

a) Démontrer que  $I(a)$  est un idéal de  $\mathbb{Q}(X)$ . Démontrer qu'il existe  $\pi_a \in \mathbb{Q}[X]$  appelé polynôme minimal de  $a$  tel que  $I(a) = \pi_a \mathbb{Q}[X]$ .

b) On note  $S$  l'ensemble des nombres algébriques  $a$  tels que  $\pi_a$  appartient à  $\mathbb{Z}[X]$ ,  $|a| > 1$  et toute racine de  $\pi_a$  différente de  $a$  a un module  $< 1$ . On note  $E$  l'ensemble des polynômes minimaux des éléments de  $S$ .

i) Démontrer que  $\mathbb{Q} \cap S = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$  et que  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \in S$ .

ii) Démontrer que  $S \subset \mathbb{R}$ .

c) On pose  $P_1 = X^3 - X - 1$ ,  $P_2 = X^3 + X + 1$ ,  $P_3 = X^4 - X^3 - 1$ . On suppose que  $P_1, P_2$  et  $P_3$  sont les polynômes minimaux de leurs racines.

i) Écrire un programme évaluant si ces polynôme appartiennent à  $E$ .

ii) Pour les polynômes  $P_1, P_2$  et  $P_3$  appartenant à  $E$ , évaluer à la précision  $10^{-13}$  la valeur de  $a \in S$  correspondante.

d) Évaluer les 70 premiers termes des suites :  $(a^n - \lfloor a^n \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\left( \sum_{k=0}^n \sin^2(a^n \pi) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Que pouvez-vous conjecturer ?

e) Démontrer que  $\pi_a$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ . En déduire que les racines de  $\pi_a$  sont simples.

f) Montrer que la matrice compagnon associée à  $\pi_a$  est diagonalisable.

**Exercice 25 :** On pose  $H_0 = I_n$  et, pour  $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $H_u = I_n - 2 \frac{uu^T}{u^T u}$ .

a) Montrer que, si  $u \neq 0$ ,  $H_u$  est la matrice de la réflexion par rapport à l'hyperplan  $\text{Vect}(u)^\perp$ .

b) Montrer que toute réflexion est de la forme  $H_u$  pour un certain  $u$ .

c) Programmer la fonction  $u \mapsto H_u$ .

d) Si  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \text{Vect}(e_1)$  et  $u = v - \|v\|e_1$ , montrer que  $H_u v = \|v\|e_1$ . Ind. Montrer que  $H_u x = x - 2 \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} u$ .

e) Montrer que, pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$  tels que  $H_u A = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ .

f) Montrer que pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , il existe des matrices  $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $R$  triangulaire supérieure telles que  $M = QR$ .

g) Montrer que, pour tout  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $|\det(M)|^2 \leq \prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_{i,j}^2$ .

**Exercice 26 : (MP)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres complexes distinctes de  $A$  et  $m_1, \dots, m_p$  leurs multiplicités respectives. On pose alors  $Q_A(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$ .

a) On considère  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ .

i) Écrire une fonction Python prenant en argument un polynôme  $P$  et retournant le PGCD de  $P$  et  $P'$ .

ii) On pose  $A_0 = A$  et  $A_{n+1} = A_n - Q_A(A_n) Q_A(A_n)^{-1}$ . Calculer avec Python les matrices  $A_n$  pour  $n \in \llbracket 0, 20 \rrbracket$  en admettant provisoirement le résultat de la question c). Que constate-t-on ?

iii) Recommencer en utilisant la matrice  $B$  au lieu de la matrice  $A$ .

On revient au cas général.

b) Montrer que  $Q'_A$  et  $\chi_A$  sont premiers entre eux.

c) Montrer que  $\chi_A = Q_A \text{PGCD}(\chi_A, \chi'_A)$ .

d) Soient  $R$  un anneau,  $n \in R$  un élément nilpotent et  $j \in R$  un élément inversible tels que  $nj = jn$ . Montrer que  $n + j$  est inversible.

e) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $(P_n) :< A_n$  existe, est un polynôme en  $A$  et vérifie  $Q'_A(A_n)$  inversible et  $Q_A(A_n) \in Q_A(A)^{2^n} \mathbb{C}[A] \gg$ . Montrer que la propriété  $(P_n)$  est vérifiée pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En déduire que la suite  $(A_n)$  est bien définie.

f) Montrer que la suite  $(A_n)$  converge vers une matrice  $D$  diagonalisable et que  $N = A - D$  est nilpotente. Justifier que  $N$  et  $D$  sont polynômes en  $A$ .