

Préparation des oraux - Une correction des exercices Centrale Python

Exercice 1 : Soit n un entier naturel. On considère la matrice $A_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $a_{j-1,j} = j - 1$, $a_{j+1,j} = n - (j - 1)$ pour tout j et dont tous les autres coefficients sont nuls.

- Ecrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie A_{n+1} .
- Déterminer avec Python les valeurs propres de A_{n+1} . Que peut-on conjecturer ?
- Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ canoniquement associé à la matrice A_{n+1} . Montrer qu'il existe un polynôme Q ne dépendant pas de n tel que $u(P) = QP' + nXP$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
- En déduire les éléments propres de u .
- La matrice A_{n+1} est-elle diagonalisable ?

Correction Exercice 1 :

a. et b.

```
import numpy as np
# question a
def f_An(n:int)-> np.array :

    A = np.zeros([n+1,n+1])

    for j in range (0,n):

        A[j+1,j] = n - (j)
        A[j,j+1] = j+1

    return A
# question b
n = 6

for i in range (n) :
```

```
    A = f_An(i)
```

```
    vp = np.linalg.eigvals(A)
    print(vp)
```

On conjecture que A admet $n + 1$ valeurs propres de la forme $-n + 2k$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

c. On a pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $u(X^k) = kX^{k-1} + (n - k)X^{k+1} = (1 - X^2)kX^{k-1} + nXX^k$ donc par combinaison linéaire on obtient $u(P) = (1 - X^2)P' + nXP$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

d. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $u(P) = \lambda P \Leftrightarrow P' = \frac{\lambda - nX}{1 - X^2}P$. Une solution y de l'équation différentielle $y' = \frac{\lambda - nx}{1 - x^2}$ est de la forme $y(x) = C(1 + x)^{\frac{n-\lambda}{2}}(1 - x)^{\frac{n+\lambda}{2}}$ donc pour que celle-ci soit polynômiale il faut et il suffit que $\frac{n-\lambda}{2} \in \mathbb{N}$ et $\frac{n+\lambda}{2} \in \mathbb{N}$.

On a donc $\text{Sp}(A_{n+1}) = \{-n + 2k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ et, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $E_{-n+2k}(A_{n+1}) = \text{Vect}(P_k)$ où $P_k = (1 + X)^{n-k}(1 - X)^k$.

e. La matrice A_{n+1} , $n \in \mathbb{N}$, est d'ordre $n + 1$ et admet $n + 1$ valeurs propres distinctes donc est diagonalisable.

Exercice 3 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = x \prod_{k=1}^n (1 - \frac{x}{k})$.

a. i. Définir une fonction $P(n,x)$ qui renvoie la valeur de $P_n(x)$.

ii. Tracer les graphes des $P_n(x)$ pour $x \in [0,1]$ et n variant de 1 à 10. Qu'observe-t-on ?

iii. Définir une fonction $M(n)$ qui renvoie l'abscisse x_n du maximum de P_n sur $[0,1]$. Pour k allant de 1 à 5, afficher $x_n \ln(n)$ avec $n = 10^k$. Qu'observe-t-on ?

b. i. Montrer que P_n admet un maximum sur $[0,1]$, atteint en un unique point noté x_n .

ii. En considérant $x \mapsto \ln(P_n(x))$, montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

iii. Trouver un équivalent de x_n quand n tend vers l'infini.

Correction Exercice 3 :

a.

```
from matplotlib import pyplot as plt
from math import log

#i
def P(n,x) :
    '''
    if n == 1 :
        return x*(1-x)
    else :
        return (1 - x/n)*P(n-1,x)
    '''
    P = x
    for k in range (1,n+1) :
        P *= 1 - x/k
    return P

#ii
dx = 0.001
L_x = []
x = 0
L_x.append(x)
while x < 1 :
    x+=dx
    L_x.append(x)

for n in range (1,11):
    L_Pn = [P(n,x) for x in L_x]
    #plt.figure(n)
    plt.plot(L_x,L_Pn,label = "n = " + str(n))
    plt.legend()

plt.xlabel("x")
plt.ylabel("P(n,x)")
plt.grid()

#plt.show()

#iii

def M(n) :
    dx = 0.001
    L_x = []
    x = 0
    L_x.append(x)
    while x < 1 :
        x+=dx
        L_x.append(x)
    L_Pn = [P(n,x) for x in L_x]
    M = max(L_Pn)
    iM = L_Pn.index(M)
    xn = L_x[iM]
    return xn

L_rep = []
```

```

for k in range (1,6):
    n = 10**k
    xn = M(n)
    L_rep.append(round(xn*k*log(10),5))

print(L_rep)

```

On observe que la suite $(x_n \ln(n))$ semble converger vers 1.

b.i. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1[$, $f_n(x) = \ln(P_n(x)) = \ln(x) + \sum_{k=1}^n \ln(1 - \frac{x}{k})$.

Alors, pour $x \in]0, 1[$, $f'_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x-k}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x-k)^2} < 0$.

Donc f'_n est strictement croissante sur $]0, 1[$ puis f'_n étant continue avec $f'_n \xrightarrow{0^+} +\infty$ et $f'_n \xrightarrow{1^-} -\infty$, il existe un unique x_n dans $]0, 1[$ tel que $f'_n(x_n) = 0$ avec f_n strictement croissante sur $]0, x_n[$ et strictement décroissante sur $]x_n, 1[$. Par passage à l'exponentielle, on obtient P_n strictement croissante sur $]0, x_n[$ et strictement décroissante sur $]x_n, 1[$ et donc P_n admet un unique maximum au point x_n .

ii. On a $f'_n(x_n) = 0$ donc $\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k - x_n}$. On a donc clairement $\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et en isolant le premier terme de la somme,

$$\frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{1 - x_n} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k - 1} = \frac{1}{1 - x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

iii. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Il est classique que $H_n \sim \ln(n)$, ce peut se montrer par une comparaison

série-intégrale ou aussi en montrant que $(H_n - \ln(n))$ converge à l'aide de la série des différences (qui converge absolument).

On remarque que $x_n \leq \frac{1}{2}$ car $f'_n(\frac{1}{2}) < 0$ donc $\frac{1}{1 - x_n} = o(H_n)$ (la quantité de gauche est bornée) et

$$H_{n-1} = H_n - \frac{1}{n} = H_n + o(H_n) \text{ donc } \frac{1}{1 - x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sim H_n \sim \ln(n).$$

On peut alors conclure que par encadrement, $x_n \sim \frac{1}{\ln(n)}$.

Exercice 4 : On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\omega^n}{n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

a. La suite (S_n) semble-t-elle converger ? Si oui, donner une approximation de sa limite S .

b. Soit $I = \int_0^1 \frac{\omega - t}{1 + t + t^2} dt$. Justifier l'existence de I . Par la méthode des rectangles, trouver une valeur approchée de I .

c. Comparer I à S , que peut-on conjecturer ? Démontrer cette conjecture.

d. Donner la valeur exacte de I .

e. On considère une suite complexe $(a_n)_{n \geq 1}$ 3-périodique. On pose alors $u_n = \frac{a_n}{n}$. Montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si $a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

Correction Exercice 3 :

a.

```
from matplotlib import pyplot as plt
from math import pi, cos, sin
```

```
theta = 2*pi/3
w = cos(theta) +1j*sin(theta)
```

```
def S(n):
    S = 0
    for k in range (1,n+1):

        S+= (w**k)/k
    return S
```

```
L_S = [S(k) for k in range(1,10**2)]
```

```
L_S_r = [x.real for x in L_S]
L_S_i = [x.imag for x in L_S]
X=[k for k in range(1,10**2)]
```

```
plt.plot(X,L_S_r)
plt.plot(X,L_S_i)
plt.show()
```

La suite (S_n) semble converger vers $S \approx -0,55 + i 0,52$ b. La fonction $t \mapsto \frac{\omega - t}{1 + t + t^2}$ est continue sur $[0, 1]$ donc est intégrable sur $[0, 1]$ ce qui justifie l'existence de I .

```
from math import pi, cos, sin
```

```
n=10**3
theta = 2*pi/3
w = cos(theta) +1j*sin(theta)
```

```
def f(x):
    y=(w-x)/(1+x+x**2)
    return y
```

```
def S(n):
    S = 0
    for k in range (0,n+1):

        S+= f(k/n)
    return S
```

```
I=1/n*S(n)
```

Le programme donne $I \approx -0,55 + i 0,52$.

c. On conjecture $S = I$. Il faut faire ici une interversion série-intégrale ici :

Pour $k \geq 1$, $\frac{\omega^k}{k} = \omega \int_0^1 (t\omega)^{k-1} dt$.

Le théorème d'intégration terme à terme ne fonctionne pas ici car $\sum \int_0^1 |(t\omega)^{k-1}| dt$ diverge (on pouvait l'anticiper car la série $\sum \frac{\omega^k}{k}$ ne converge pas absolument), on applique donc le théorème de convergence dominée sur la suite des sommes

partielles. On pose $S_n(t) = \sum_{k=0}^n t^k \omega^k$ pour $t \in [0, 1[$. La suite (S_n) converge simplement sur $[0, 1[$ vers $t \mapsto \frac{1}{1-\omega t}$ (et tout ici est bien c.p.m. sur $[0, 1[$).

Pour $t \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, $|S_n(t)| = \left| \frac{1 - (\omega t)^{n+1}}{1 - \omega t} \right| \leq \frac{2}{|1 - \omega t|} = \varphi(t)$.

La fonction φ est intégrable sur $[0, 1[$ (car continue sur $[0, 1]$).

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{1 - \omega t} dt$.

Or $\int_0^1 S_n(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{\omega^k}{k+1}$ donc on a

$$\omega \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\omega^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\omega^k}{k} = \int_0^1 \frac{\omega}{1 - \omega t} dt = \int_0^1 \frac{\omega - t}{1 + t + t^2} dt.$$

d. On peut effectuer une décomposition en éléments simples mais il est plus rapide de remarquer que

$$I = \left(\omega + \frac{1}{2}\right) \int_0^1 \frac{dt}{1 + t + t^2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t + 1}{1 + t + t^2} dt$$

la première intégrale se calcule en faisant une mise sous forme canonique du trinôme pour récupérer une dérivée de arctan. On trouve au final (à vérifier) :

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} (2\text{Arctan}(\sqrt{3}) - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{3} \ln(3).$$

d. Question difficile. Si $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, on montre que les suites des sommes partielles d'indices $3N$, $3N + 1$ et $3N + 2$ convergent vers une même limite en faisant des regroupement dans les sommes (raisonner modulo 3).

Si $a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$, écrire $a_3 = \alpha - a_2 - a_1$, $\alpha \neq 0$ puis montrer que la suite des sommes partielles d'indices $3N$ diverge comme somme d'une suite convergente et d'une suite divergente...

Exercice 8 : On pose $\varphi(x) = x^4 \sin(\frac{1}{x^3})$ pour $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 0$.

a. Soit y une solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle $(E) : xy' + 3y = \varphi(x)$. Montrer que $y'(0)$ est nécessairement nulle. Tracer à l'aide de la méthode d'Euler y sur $[0, 2]$.

b. On pose $f(x) = x^6 \sin(\frac{1}{x^3})$ pour $x \neq 0$, avec $f(0) = 0$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, tracer f sur $[-1, 1]$. Vérifier que $G(x) = \frac{1}{x^3} \int_0^x f(t) dt$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Correction Exercice 8 :

a. Soit y une solution sur $\mathbb{R}_+$. Nécessairement $y(0) = 0$ et y est dérivable en 0 donc $y(x) = xy'(0) + o(x)$.

Réinjectant dans l'équation, il vient $xy'(x) + 3xy'(0) + o(x) = \varphi(x) = o(x)$, donc $y'(x) + 3y'(0) = o(1)$, donc y' admet une limite finie en 0.

Comme y est continue sur $\mathbb{R}_+$ (car dérivable), de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (car sur cet intervalle, on peut écrire $y'(x) = \frac{\varphi(x) - 3y(x)}{x}$), le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ donne y' continue en 0, donc $y'(x) = y'(0) + o(1)$. Il vient $4y'(0) = o(1)$ donc $y'(0) = 0$.

```
import math as ma
import matplotlib.pyplot as plt
X = [k/100 for k in range(201)]
y0, z0 = 0, 0
for k in range(201):
    Y.append(y0)
    x = (k + 1)/100
    y0 += z0/100
    z0 = (x**4*ma.sin(1/x**3) - 3*y0)/x
plt.plot(X, Y)
plt.show()
```

b. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ par les théorèmes généraux, continue en 0 et même dérivable puisque $f(x) = o(x)$.

Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = 6x^5 \sin(\frac{1}{x^3}) + x^6(\frac{-3}{x^4}) \cos(\frac{1}{x^3})$ donc $f'(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, ce qui donne f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ via le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$.

```
def f(x):
    if x == 0:
        return 0
    else:
        return x**6*ma.sin(1/x**3)
X = [-1 + k/100 for k in range(200)]
Y = [f(x) for x in X]
plt.plot(X, Y)
plt.show()
```

La fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ en tant que produit. Et $f(x) = o(x^5)$ donc $\int_0^x f(t) dt = o(x^6)$, et $G(x) = o(x^3)$. Ainsi, G se prolonge par continuité en 0 par $G(0) = 0$, et ce prolongement est dérivable.

Il est même de classe $\mathcal{C}^1$ puisque $\forall x \neq 0$, $G'(x) = -\frac{3}{x^4} \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x^3} f(x) = -\frac{3}{x^4} \int_0^x f(t) dt + x^3 \sin(\frac{1}{x^3}) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ et le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ s'applique une fois de plus.

Enfin, on a vu que pour tout $x \neq 0$, on a $xG'(x) = -\frac{3}{x^3} \int_0^x f(t) dt + x^4 \sin(\frac{1}{x^3}) = -3G(x) + \varphi(x)$. Enfin $G(0) = 0 = \varphi(0)$ donc $0G'(0) + 3G(0) = \varphi(0)$, ce qui achève de prouver que G est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 : Soit $E = \{f \in C^0([0,1]) \mid f(0) = 0, f(1) = 1\}$. Pour toute fonction $f \in E$, on définit $g = \varphi(f)$ par : $g(x) = f(3x)/2$ si $0 \leq x \leq 1/3$, $g(x) = 1/2$ si $1/3 < x < 2/3$ et $g(x) = \frac{1}{2}(1 + f(3x - 2))$ si $2/3 \leq x \leq 1$.

a) Montrer que $g \in E$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^n(f) \in E$ (où $\varphi^n = \varphi \circ \dots \circ \varphi$).

b) i) Écrire une fonction en python qui renvoie $\varphi(f)$.

ii) Écrire une fonction **iter** (n, f) qui renvoie $\varphi^n(f)$.

iii) Tracer les courbes des fonctions $\varphi^n(f)$ pour les premières valeurs de n et $f : x \mapsto x$.

iv) Même question avec $f : x \mapsto \sin(\pi x/2)^2$. Que peut-on remarquer ?

c) Montrer que φ est 1/2-lipschitzienne.

d) Montrer que la série $\sum (\varphi^{n+1}(f) - \varphi^n(f))$ est normalement convergente. En déduire la convergence uniforme de la suite $(\varphi^n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

e) Montrer que la limite de cette suite ne dépend pas de la fonction f . On la note f_∞ .

f) Montrer que f_∞ est l'unique fonction de E qui vérifie $\varphi(f_\infty) = f_\infty$.

Correction exercice 12 :

a. g est définie par morceaux, on $g(0) = f(0)/2 = 0$ et $g(1) = \frac{1}{2}(1 + f(1)) = 1$. Par continuité de f , g est clairement continue sur $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$ et sur $[2/3, 1]$, il reste à vérifier la continuité de g aux points $1/3$ et $2/3$ en regardant les limites à gauche et à droite...

Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^n(f) \in E$.

b.

```
from matplotlib import pyplot as plt
from math import sin, pi
import numpy as np
plt.close('all')
```

```
def phi(f) :
    def g (x):
        if 0 <= x <= 1/3 :
            return f(3*x)/2
        elif 1/3 < x < 2/3 :
            return 1/2
        else :
            return (1+f(3*x - 2))/2
    return g
```

```
def iter (n,f) :
    g = f
    for _ in range (n) :
        g = phi(g)
    return g
```

```
f = lambda x : x
f = lambda x : sin(pi*x/2)**2
```

```
n = 10
dx = 0.001
```

```
L_x = list(np.arange(0,1,dx))
'''
```

```
[]
```

```
x = 0
```

```
L_x.append(x)
'''
```

```
while x < 1 :
    x+=dx
    L_x.append(x)
```

```
for k in range (1,n+1) :
    gk = iter(k,f)
    L_k = [gk(x) for x in L_x]
    plt.plot(L_x,L_k,label = "k = " + str(k))
```

```
plt.grid()
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("phi(f)**k")
plt.show()
```

On remarque que la suite $(\varphi^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ semble converger uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction indépendante de f .

c. Soit $(f, g) \in E^2$. On a pour $x \in [0, \frac{1}{3}]$, $|\varphi(f)(x) - \varphi(g)(x)| = |\frac{f(3x) - g(3x)}{2}| \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$, pour $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $|\varphi(f)(x) - \varphi(g)(x)| = 0 \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$ et pour $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $|\varphi(f)(x) - \varphi(g)(x)| = |\frac{f(3x-2) - g(3x-2)}{2}| \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$. Par passage à la borne supérieure on a donc :

$$\|\varphi(f) - \varphi(g)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty.$$

d. Par récurrence immédiate on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\varphi^{n+1}(f) - \varphi^n(f)\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}\|\varphi(f) - f\|_\infty$. Cette inégalité permet alors de conclure que $\sum (\varphi^{n+1}(f) - \varphi^n(f))$ est normalement convergente.

Notons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^{k+1}(f) - \varphi^k(f)$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^n(f) - f - S = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^{k+1}(f) - \varphi^k(f) - S$ donc $(\varphi^n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers $f + S = f_\infty$.

e. Prenons f et g deux fonctions de E . Comme à la question précédente, on a par récurrence sur n ,

$$\|\varphi^n(f) - \varphi^n(g)\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}\|f - g\|_\infty. \text{ Donc en passant à la limite } \|f_\infty - g_\infty\|_\infty = 0 \text{ d'où } f_\infty = g_\infty.$$

f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{n+1}(f_\infty) = \varphi(\varphi^n(f_\infty))$ et φ étant continue car lipschitzienne on obtient par passage à la limite (dans E muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$), $f_\infty = \varphi(f_\infty)$ c.a.d. f_∞ est un point fixe de φ . De plus ce point fixe est unique car φ est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne : si f et g sont des points fixes de φ , $\|\varphi(f) - \varphi(g)\|_\infty = \|f - g\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$ donc $f = g$.

Exercice 13 : On dispose d'une urne avec des boules numérotées de 1 à n . On tire une boule au hasard et on enlève les boules de numéro plus grand (au sens large). On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.

1. Ecrire une fonction **expérience**(n) qui simule X_n .
2. Ecrire une fonction **moyenne**(n) de calcul de $\mathbb{E}(X_n)$ (on répétera 100 n fois l'expérience).
3. Avec Python, calculer $\frac{\mathbb{E}(X_n)}{\ln(n)}$ pour $n = 100, 500, 1000$. Conjecture ?
4. Déterminer loi, espérance et variance de X_2 .
5. Déterminer loi, espérance et variance de X_3 .
6. Préciser $X_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}(X_n = 1)$ ainsi que $\mathbb{P}(X_n = n)$.
7. Montrer que

$$\forall k \geq 2, \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \mathbb{P}(X_{i-1} = k - 1)$$

8. Montrer que

$$\mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_i)$$

9. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Correction exercice 13 :

- 1.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def experience(n):
    maxi=n
    res=0
    while maxi>0:
        res+=1
        maxi=rd.randint(1,maxi+1)-1
    return res
```

- 2.

```
def moyenne(n):
    somme=0
    for i in range(100*n):
        somme+=experience(n)
    return somme/(100*n)
```

- 3.

```
for n in [100,500,1000]:
    print(moyenne(n)/np.log(n))
```

On peut conjecturer que $\mathbb{E}(X_n) \sim \ln(n)$.

4. $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$. ($X_2 = 1$) signifie que le premier tirage donne 1. Ainsi

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{E}(X_2) = \frac{3}{2}, \mathbb{V}(X_2) = \frac{1}{4}$$

5. $X_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. ($X_2 = 1$) signifie que le premier tirage donne 1 et donc $\mathbb{P}(X_3 = 1) = 1/3$. ($X_2 = 3$) signifie que l'on tire 3 puis 2 puis 1 et $\mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Finalement

$$\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{E}(X_3) = \frac{11}{6}, \mathbb{V}(X_3) = 2$$

6. $X_n(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ (on tire en premier 1). ($X_n = n$) signifie que l'on tire successivement $n, \dots, 1$ et ainsi (probabilités composées)

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \dots \frac{1}{2} = \frac{1}{n!}$$

7. Pour exprimer $\mathbb{P}(X_n = k)$, on conditionne selon la valeur T_1 du résultat du premier tirage

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(X_n = k \mid T_1 = j) \mathbb{P}(T_1 = j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(X_n = k \mid T_1 = j)$$

Lorsque l'on tire la boule numéro j au premier tirage, dans les tirages suivant tout se passe comme si on recommençait l'expérience avec uniquement $j - 1$ boules. Compte-tenu du tirage déjà effectué, on a donc

$$\mathbb{P}(X_n = k \mid T_1 = j) = \mathbb{P}(X_{j-1} = k - 1)$$

8. On a $X_n(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ et donc

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X_n = k)$$

On a alors

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n k \mathbb{P}(X_{j-1} = k - 1)$$

On intervertit les sommes :

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X_{j-1} = k - 1) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X_j = k - 1)$$

En écrivant que $k = k - 1 + 1$, on a donc

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\mathbb{E}(X_j) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_j = k - 1) \right) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$$

9. On en déduit que

$$(n+1)\mathbb{E}(X_{n+1}) - n\mathbb{E}(X_n) = 1 + \mathbb{E}(X_n)$$

c'est à dire

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{n+1}$$

et on peut conclure que

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$$

Exercice 16 : (MP) a) Soit G un groupe de cardinal n . Montrer que G est cyclique si et seulement s'il existe un élément de G d'ordre n .

b) Écrire une fonction calculant le pgcd de deux entiers a et b , puis une fonction déterminant le nombre de générateurs de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ lorsque p est un nombre premier.

c) Si p est un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, déterminer le cardinal de $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$.

d) Soit p un nombre premier.

Montrer, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que $(p+1)^{p^k} \equiv 1 + p^{k+1} [p^{k+2}]$.

Correction exercice 16 :

a) Si G est cyclique de cardinal n , alors par définition il existe un élément dans G d'ordre n . La réciproque est tout aussi évidente : si G admet un élément d'ordre n , le sous-groupe engendré par cet élément est un sous-groupe de cardinal n de G , donc forcément égal à G .

b) Voici un programme récursif basé sur l'algorithme d'Euclide :

```
def pgcd(a,b):
    if b==0:
        return(a)
    return (pgcd(b,a%b))
```

Si p est un nombre premier, il est bien connu que le résultat est $p-1$. L'examineur ou l'examinatrice souhaitait sans doute une preuve numérique qui permettrait de conjecturer la valeur $p-1$. En effet, le nombre de générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ correspond précisément au nombre d'éléments $a \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ qui sont premiers avec n . D'où le programme suivant basé sur le précédent :

```
def cardgen(n):
    s=0
    for a in range(1,n):
        if pgcd(a,n)==1:
            s=s+1
    return(s)
```

On constate effectivement que ce programme renvoie $n-1$ si n est premier.

c) Comme rappelé à la question précédente, on doit compter le nombre de $a \in \llbracket 1, p^\alpha - 1 \rrbracket$ qui sont premiers avec p . Comme p est premier, les seules exceptions sont les multiples de p , c'est-à-dire $p, 2p, \dots, (p^{\alpha-1} - 1)p$. Le nombre recherché est donc

$$p^\alpha - 1 - (p^{\alpha-1} - 1) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$$

d) Pour $k=0$, le résultat est immédiat. On suppose le résultat vrai au rang k et essayons de le démontrer au rang $k+1$. D'après l'hypothèse de récurrence au rang k , il existe un nombre entier $D \in \mathbb{Z}$ tel que

$$(p+1)^{p^k} = 1 + p^{k+1} + Dp^{k+2}$$

On élève à la puissance p grâce au binôme de Newton :

$$(p+1)^{p^{k+1}} = \sum_{j=0}^p \frac{p!}{j!(p-j)!} (1+p^{k+1})^j (Dp^{k+2})^{p-j}$$

On cherche à mettre la somme précédente sous la forme $1 + p^{k+2} + D'p^{k+3}$ avec $D' \in \mathbb{Z}$. Les termes de la somme pour lesquels $p-j \geq 2$ sont divisibles par $p^{(k+2)(p-j)}$ et donc par p^{2k+4} . Or on vérifie que $2k+4 \geq k+3$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent, les seuls termes à étudier précisément sont ceux d'indices $j = p-1$ et $j = p$:

- Cas $j = p-1$. Le terme de la somme vaut

$$p(1+p^{k+1})^{p-1} Dp^{k+2}$$

qui est clairement divisible par p^{k+3} .

- Cas $j = p$. Le terme de la somme vaut

$$(1+p^{k+1})^p$$

et est congru à $1 + p^{k+2} + \frac{p(p-1)}{2} p^{2(k+1)}$ modulo $p^{3(k+1)}$ en développant de nouveau grâce au binôme de Newton. Comme $3(k+1) \geq k+3$ et que $\frac{p(p-1)}{2}$ est divisible par le nombre premier p , on déduit que $\frac{p(p-1)}{2} p^{2(k+1)}$ est divisible par p^{2k+3} et donc forcément par p^{k+3} . On obtient la conclusion voulue.

Exercice 17 : On définit une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes par les conditions :

$$A_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, A'_{n+1} = A_n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 A_{n+1}(x)dx = 0.$$

a) Déterminer A_1, A_2, A_3 . Écrire un code qui calcule A_n (utiliser **numpy.polynomial**).

b) Comparer pour plusieurs valeurs de n : $A_n(0)$ et $A_n(1)$; $A_n(X)$ et $A_n(1-X)$. Tracer $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ et $x \mapsto \sum_{k=0}^{10} A_k(0)x^k$.

Émettre des conjectures.

c) Démontrer les conjectures émises.

Correction exercice 17 :

a) On a directement $A_1 = X - \frac{1}{2}$ puis, par intégration et annulation de l'intégrale, $A_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}$. On trouve aussi $A_3 = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12}$. Voici un programme qui renvoie A_n en tant qu'objet Python de type **Polynomial**.

```
import numpy.polynomial as pol
def A(n):
    U=pol.Polynomial([1])
    if n==0:
        return(U)
    else:
        B=A(n-1).integ()
        C=B.integ(1,0)
        D=B-C(1)
        return (D)
```

b) On compare $A_n(0)$ et $A_n(1)$ pour les 9 premières valeurs via le programme suivant :

```
for n in range(1,10):
    print(n,A(n)(0),A(n)(1))
```

Le résultat obtenu suggère la conjecture suivante :

Conjecture 1. On a $A_n(0) = A_n(1)$ pour tout $n \geq 2$.

On peut également composer les polynômes (le code de programmation de composition des polynômes est intuitif) :

```
for n in range(1,10):
    S=pol.Polynomial([1,-1])
    print(n)
    print(A(n))
    print(A(n)(S))
    print("")
```

Au signe près, on trouve les mêmes valeurs numériques (non facilement identifiables) pour les coefficients de $A_n(1-X)$ et A_n . La conjecture qui se profile est :

Conjecture 2. On a $A_n(1-X) = (-1)^n A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Passons à la représentation graphique demandée.

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy
def u(x):
    return(x/(math.exp(x)-1))
def w(x):
    S=A(0)(0)
    for k in range (1,11):
        S+=A(k)(0)*(x**k)
    return(S)
X=numpy.linspace(-2,2,10)
Y=[u(x) for x in X]
Z=[w(x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.plot(X,Z)
plt.show()
```

Si l'on remplace la ligne définissant les ordonnées Z par

```
Z=[w(x)+1 \text{ for } x \text{ in } X]
```

afin de translater vers le haut la courbe de la seconde fonction, alors il devient clair Il est donc maintenant clair que la première représentation graphique est une superposition des deux courbes.

Conjecture 3. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(0)x^k$$

c) **Preuve de la conjecture 1.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On a tout simplement :

$$A_n(1) - A_n(0) = \int_0^1 A'_n(t)dt = \int_0^1 A_{n-1}(t)dt = 0$$

Preuve de la conjecture 2 par récurrence. La formule est triviale pour $n = 0$. On suppose que l'on a $A_n(1 - X) = (-1)^n A_n$ et l'on souhaite montrer la formule $A_{n+1}(1 - X) = (-1)^{n+1} A_{n+1}$. Or le polynôme différence $A_{n+1}(1 - X) - (-1)^{n+1} A_{n+1}$ est clairement d'intégrale nulle de 0 à 1 (quitte à faire un changement de variable linéaire immédiat sur le terme en $1 - X$) et son polynôme dérivé est

$$-A'_{n+1}(1 - X) - (-1)^{n+1} A'_{n+1} = -A_n(1 - X) - (-1)^{n+1} A_n = 0$$

Ainsi, $A_{n+1}(1 - X) - (-1)^{n+1} A_{n+1}$ est forcément le polynôme nul.

Preuve de la conjecture 3. Il y a deux difficultés dans cette conjecture. D'abord, il faut justifier que la série du second membre converge et préciser pour quelles valeurs de x . En l'occurrence, on a peut-être été trop généreux en s'autorisant à choisir x dans $\mathbb{R}$ (privé de $\{0\}$). Il serait déjà satisfaisant d'avoir une information pour x voisin de l'origine. Justifions que la suite $(A_k(0))$ est bornée. Cela prouvera, d'après la théorie des séries entières, que la série $\sum A_k(0)x^k$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$ (le rayon de la série entière est au moins égal à 1). D'après la définition des polynômes A_k , l'inégalité $\sup_{-1 \leq x \leq 1} |A_k(x)| \leq 1$ s'obtient immédiatement par récurrence grâce au lemme suivant :

Lemme 1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant $\int_0^1 f(x)dx = 0$ et $\|f'\|_\infty \leq 1$. Alors $\|f\|_\infty \leq 1$.

Preuve. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on écrit

$$f(x) = (f(x) - f(1/2)) + f(1/2) \quad (1)$$

L'inégalité des accroissements finis donne

$$|f(x) - f(1/2)| \leq |x - 1/2| \times \|f'\|_\infty \leq \frac{1}{2} \quad (2)$$

En intégrant (1) sur $[0, 1]$ et en exploitant (2), on obtient

$$|f(1/2)| = \left| \int_0^1 f(x) - f(1/2)dx \right| \leq \int_0^1 |f(x) - f(1/2)|dx \leq \frac{1}{2} \quad (3)$$

Grâce à (1) et à (3), on conclut que $|f(x)| \leq 1$. Ensuite, il faut trouver un moyen d'identifier les coefficients de deux côtés ! Il est plus simple de tenter de démontrer la formule suivante :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad x = (e^x - 1) \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(0)x^k. \quad (4)$$

Par convergence absolue des séries envisagées, le membre droit se reformule via un produit de Cauchy :

$$\forall x \in]-1, 1[\left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} A_k(0)x^k \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{A_{n-k}(0)}{k!} \right) x^n \right]$$

Le coefficient d'indice $n = 1$ vaut $A_0(0) = 1$ (d'après la question **a**)). La formule (4) sera donc conséquence des identités suivantes :

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=1}^n \frac{A_{n-k}(0)}{k!} = 0 \quad (5)$$

Cette formule est a priori non évidente mais devient très abordable si l'on invoque le lemme suivant :

Lemme 2. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a la formule $P(1) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

Preuve. Il suffit d'appliquer la formule de Taylor de 0 à 1. On applique le lemme précédent au polynôme A_n (qui est de degré n et vérifie $A_n^{(k)} = A_{n-k}$ par récurrence immédiate) :

$$A_n(1) = A_n(0) + \sum_{k=1}^n \frac{A_{n-k}(0)}{k!}$$

La conjecture 1 (prouvée ci-dessus) affirme que $A_n(1) = A_n(0)$. Donc (5) est vraie.

Exercice 18 : (typé MP) Une suite réelle $(u_n)_{n \geq 1}$ est dite équirépartie modulo 1 lorsque, pour tous a, b réels tels que $0 \leq a \leq b < 1$, on a

$$\frac{1}{n} \text{Card} \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \{u_k\} \in [a, b]\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b - a$$

où $\{x\} := x - [x]$ désigne la partie fractionnaire de x .

a) i) Définir une fonction $c(u, n, a, b)$ qui calcule :

$$C_n(a, b) = \text{Card} \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \{u_k\} \in [a, b]\}.$$

ii) Afficher les 500 premiers termes de $C_n(a, b)$ lorsque $u_n = \sqrt{n}$ pour $a = 0$ et $b = 1/2$, puis pour d'autres couples (a, b) . Formuler une conjecture.

iii) Idem avec $u_n = \ln n$, puis avec $u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

b) On prend $u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Trouver une suite v tendant vers 0 telle que $u + v$ soit à valeurs entières. En déduire que u n'est pas équirépartie modulo 1.

c) On pose $u_n = \sqrt{n}$. On fixe a, b dans $[0, 1[$ tels que $a \leq b$.

i) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que $\{u_k\} \in [a, b]$ si et seulement s'il existe un entier p tel que $(p+a)^2 \leq k \leq (p+b)^2$.

ii) En déduire un encadrement de $C_n(a, b)$ à l'aide de $\sum_{p=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} (b^2 - a^2 + 2p(b-a))$.

iii) Montrer que (u_n) est équirépartie modulo 1.

d) La suite $(\ln n)$ est-elle équirépartie modulo 1 ?

Correction exercice 18 :

a) i) Voici un programme plus compliqué que celui demandé car on en aura besoin à la question suivante : la fonction `listC(u, n, a, b)` affiche la liste $L = [0, C_1(a, b), \dots, C_n(a, b)]$. On part d'une liste $L = [0]$, puis $L[N]$ est calculé à partir du test selon que $u(N) \in [a, b]$ ou non :

```
def listC(u,n,a,b):
    L= [0]
    for N in range(1,n+1):
        L+= [L[N-1]]
        s=u(N)-math.floor(u(N))
        if a <=s and s <=b:
            L[N]=L[N-1]+1
    return(L)
def C(u,n,a,b):
    return listC(u,n,a,b)[n]
```

ii) On exécute le programme :

```
def u(n):
    return(math.sqrt(n))
print(listC(u,500,0,1/2))
```

Comme les résultats sont proches de 250, on conjecture naturellement que $c_n(a, b)$ est équivalent à $n(b-a)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

iii) S'agissant des suites de terme général $u_n = \ln(n)$ et $u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, il ne semble pas y avoir équirépartition.

b) On pose $v_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ qui tend bien vers 0. La suite de terme général $z_n = u_n + v_n$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 (de type Fibonacci) :

$$z_{n+2} = z_{n+1} + z_n$$

Or on vérifie que $z_0 = 2$ et $z_1 = 1$ sont entiers. Cela prouve que z_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$. L'idée est que si on écrit $u_n = (u_n + v_n) - v_n$ alors on devrait être capable de calculer la partie fractionnaire $u_n - [u_n]$ en fonction de v_n . En fait, la décomposition précédente n'est intéressante que si $0 \leq -v_n < 1$. C'est vrai si n est impair. On vient donc de voir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n+1} - [u_{2n+1}] = -v_{2n+1}$$

Pour le cas pair, on a $v_n > 0$ et il vaut donc mieux écrire

$$u_n = (u_n + v_n - 1) + (1 - v_n)$$

ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} - [u_{2n}] = 1 - v_{2n}$$

Ainsi, il est clair que les termes $u_n - \lfloor u_n \rfloor$ s'agglutinent vers 0 et 1 (ce sont les deux seules valeurs d'adhérence). Ainsi, pour tout couple (a, b) avec $0 < a < b < 1$, le nombre d'indices $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $u_k - \lfloor u_k \rfloor \in [a, b]$ est majoré et n'est donc certainement pas équivalent à $n(b-a)$. La suite (u_n) n'est donc pas équirépartie.

c) i) L'inégalité $(p+a)^2 \leq k \leq (p+b)^2$ signifie précisément $a \leq \sqrt{k} - p \leq b$. Donc le choix $p = \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ donne la conclusion.

ii) On revient à la définition de $C_n(a, b)$:

$$C_n(a, b) = \sum_{k=1}^n 1_{\{u_k\} \in [a, b]}$$

D'après la question précédente, on peut découper

$$C_n(a, b) = \sum_{p=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \text{Card} \left([(p+a)^2, (p+b)^2] \cap \mathbb{N}^* \right)$$

On peut ensuite encadrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$-1 + (p+b)^2 - (p-a)^2 \leq \text{Card} \left([(p+a)^2, (p+b)^2] \cap \mathbb{N}^* \right) \leq 1 + (p+b)^2 - (p-a)^2$$

et noter que $(p+b)^2 - (p-a)^2 = b^2 - a^2 + 2p(b-a)$. Ainsi en sommant il vient

$$C_n(a, b) = \mathcal{O}(\sqrt{n}) + 2(b-a) \sum_{p=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} p = \mathcal{O}(\sqrt{n}) + (b-a) \lfloor \sqrt{n} \rfloor (\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1)$$

qui est équivalent à $(b-a)n$. Cela prouve bien que $(\sqrt{n})$ est équirépartie modulo 1.

d) Prenons le cas particulier $a := \frac{1}{4}$ et $b := \frac{1}{2}$. Posons $\varphi(n) := \lfloor e^{n+b} \rfloor$ et $\psi(n) := \lfloor e^{n+1} \rfloor$. Clairement $\varphi(n) \sim e^{n+b}$ et $\psi(n) \sim e^{n+1}$. En particulier, les suites $(\varphi(n))$ et $(\psi(n))$ tendent vers $+\infty$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $k \in [\varphi(n) + 1, \psi(n)]$, $n + \frac{1}{2} < \ln k \leq n + 1$ donc $\{\ln k\} \notin [a, b]$. Ainsi $C_{\psi(n)}(a, b) = C_{\varphi(n)}(a, b)$. Maintenant, si l'on avait $C_n(a, b) \sim n(b-a)$, alors par composition on aurait

$$C_{\varphi(n)}(a, b) \sim \varphi(n)(b-a) \sim e^{n+b}(b-a)$$

et

$$C_{\psi(n)}(a, b) \sim \psi(n)(b-a) \sim e^{n+1}(b-a)$$

Il viendrait en divisant que $e^b = e$, ce qui est faux. Ainsi $(\ln n)$ n'est pas équirépartie modulo 1.