

DM 0 : A rendre le Mardi 1er septembre 2026

EXERCICE 1 : Analyse

Thème 1 : dérivation

Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} (x^2 - \frac{1}{2})e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \\ x^2 \ln(x) - \frac{1}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

1. Démontrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
2. Démontrer que h est prolongeable par continuité en 0. On notera H la fonction prolongée à $\mathbb{R}$.
3. En appliquant le théorème "limite de la dérivée", montrer que H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Thème 2 : intégration : les questions 1. et 2. sont indépendantes

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et pour tout $x > 0$: $g(x) = \frac{1}{x} \int_x^{x^3} f(t)dt$. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et exprimer pour tout $x > 0$ $g'(x)$ en fonction de $f(x^3)$, $f(x)$ et $g(x)$.

Thème 3 : Théorème de Césaro

1. **Théorème de Césaro** : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite convergente de limite l . Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ pour tout $n \geq 1$, est convergente de limite l .
2. Application : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.
 - (a) Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
 - (b) On pose pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{(u_n)^\alpha}$. Déterminer α pour que la suite $(v_n)_n$ converge vers une limite réelle non nulle à l'aide de développements limités.
 - (c) En appliquant le théorème de Césaro, déterminer un équivalent de u_n .

EXERCICE 2 : Algèbre

1. (a) On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. On considère les vecteurs de E suivants :

$$u_1 = (1, 2, 1, 0), \quad u_2 = (1, 0, 1, 0), \quad u_3 = (1, 1, 0, -1)$$

Déterminer une équation de $F = \text{Vect}((u_1, u_2, u_3))$ et justifier que F est un hyperplan de E .

- (b) Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0 \text{ et } 2x - y - z + 2t = 0\}$. Déterminer une base et la dimension de G .
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $P = (X + i)^n - (X - i)^n$.
 - (a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P .
 - (b) Déterminer les racines de P .
 - (c) Calculer pour tout $n \geq 2$, $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.