

VALIDATION DU COURS DE MATHEMATIQUES

Ceci constitue une liste de questions de révisions non exhaustive !

1. Si E est un ensemble et $(A_i)_{i \in [1, n]}$ une famille de n parties de E , donner les définitions de : $\bigcup_{i \in [1, n]} A_i$
et de $\bigcap_{i \in [1, n]} A_i$
2. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$
3. Donner la définition de $|x|$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. Que vaut $\sqrt{x^2}$ si $x \in \mathbb{R}$?
5. Enoncer les deux inégalités triangulaires.
6. Soit $r > 0$. Déterminer les ensembles $A = \{x \in \mathbb{R} / |x| \leq r\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} / |x| > r\}$.
7. Soit $A \subset \mathbb{R}$.
 - (a) Donner la définition de : A est majorée.
 - (b) Soit $m \in \mathbb{R}$. On suppose A minorée. A quelles conditions m est-il le minimum de A ?
 - (c) Donner la définition de la borne supérieure de A puis sa caractérisation avec des quantificateurs.
8. Que vaut la somme $\sum_{k=p}^n q^k$ si $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$? ($n, p \in \mathbb{N}$ avec $n \geq p$)
9. Que vaut la somme $\sum_{k=0}^n k$?
10. Simplifier $\sum_{k=p}^n a_{k+1} - a_k$.
11. Donner la définition de $\binom{n}{p}$.
12. Enoncer la formule du binôme de Newton.
13. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, factoriser $a^n - b^n$.
14. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
15. Enoncer les formules de trigonométrie (linéarisation de $\cos^2$ et $\sin^2$, addition, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$).
16. Donner l'expression des racines nièmes de l'unité, puis d'un complexe z_0 non nul. Redémontrer le résultat.
17. Enoncer les formules d'Euler.
18. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $e^z = 1 - i$.
19. Enoncer les dérivées/primitives des fonctions usuelles.
20. Donner les ensembles de définition, de dérivabilité, et les dérivées des fonctions arcsin, arccos et arctan. Courbes représentatives ?
21. Donner l'ensemble de définition, une expression de la dérivée, les limites en $\frac{\pi^-}{2}$ et $-\frac{\pi^+}{2}$ de la fonction tangente. Tracer une allure de sa courbe représentative sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et de celle de arctan.
22. Démontrer avec la méthode de votre choix que : $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
23. Soit $x \in [-1, 1]$. Simplifier $\cos(\arcsin(x))$ et $\sin(\arccos(x))$.

24. Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du 1er et du second ordre homogène à coefficient constants ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ? Comment trouver une solution particulière avec la méthode de variation de la constante ?
25. Calculs de primitives/intégrales :
- (a) Déterminer des primitives des fonctions suivantes en précisant un intervalle sur lequel le calcul est réalisé :
- $$c : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad f : t \mapsto \frac{1}{t^2} \quad g : t \mapsto \cos^2(t) \quad h : t \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \quad k : t \mapsto \frac{2t+5}{t^2+5t+7}$$
- (b) Calculer les intégrales suivantes :
- $$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t) dt \quad J = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t^5}} dt \quad K = \int_1^2 \frac{\ln(t)}{t} dt \quad L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(t)} dt \quad M = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$
- (c) Calculer une primitive de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- (d) Calculer $\int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1} dt$
- (e) Calculer $\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)} dt$
- (f) En utilisant une fonction à valeurs complexes, déterminer une primitive des fonctions $c : t \mapsto e^{at} \cos(bt)$ et $s : t \mapsto e^{at} \sin(bt)$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
26. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$. Ecrire la définition de $f(A)$ et de $f^{-1}(B)$.
27. Donner la définition mathématique avec des quantificateurs de :
- (a) f est injective
- (b) f est surjective
28. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ où E, F, G désignent trois ensembles. Montrer que :
- (a) si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
- (b) si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
29. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Préciser l'hypothèse à assurer permettant de définir $g \circ f$ puis donner la dérivée de $g \circ f$.
30. Soit $f : I \rightarrow J$ où I et J désignent deux intervalles de $\mathbb{R}$ une bijection dérivable. A quelle condition sa bijection réciproque f^{-1} est-elle dérivable ? Donner l'expression de $(f^{-1})'$.
31. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Ecrire la définition avec des quantificateurs de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$
32. Ecrire la définition avec des quantificateurs de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
33. Donner la définition d'une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
34. Montrer qu'une suite convergente est bornée.
35. Enoncer le théorème d'encadrement ou des gendarmes. Le démontrer.
36. Enoncer de comparaison (minoration/majoration) pour les suites tendant vers l'infini. (démonstration ?)
37. Enoncer le théorème de la limite monotone pour les suites croissantes.
38. Donner la définition de deux suites adjacentes et énoncer le théorème des suites adjacentes.
39. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2$. Déterminer le terme général de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
40. Enoncer le théorème donnant le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux réelle (resp. complexe).
41. Définition de : $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$.
42. Définition de : $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ est prolongeable par continuité en a .
43. Enoncer le théorème de caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction.
44. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
45. Enoncer le théorème et l'inégalité des accroissements finis.
46. Enoncer le théorème de Rolle.
47. Enoncer le théorème des bornes atteintes.
48. Enoncer le théorème de la limite monotone pour les fonctions.
49. Définition de : $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$.

50. Enoncer le théorème "limite de la dérivée".
51. Enoncer la formule de Leibniz.
52. Définition d'une fonction convexe. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à une tangente/ corde. Caractérisation d'une fonction convexe deux fois dérivable.
53. Montrer que : a. $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$ b. $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$ c. $\exp(x) \geq 1+x$ d. $\arctan(x) \leq x$.
54. Equivalents au voisinage de 0 des fonctions usuelles.
55. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(v_n)_n$ ne s'annulant pas. Donner la définition de :
a. $u_n = O(v_n)$ b. $u_n = o(v_n)$ c. $u_n \sim v_n$
56. Enoncer les développements limités usuels : $\exp, x \mapsto \ln(1+x), \cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh}, \arctan, x \mapsto \frac{1}{1-x}, x \mapsto (1+x)^\alpha$.
57. Enoncer la formule de Taylor-Young.
58. Déterminer la limite de la suite de terme général : $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
59. Enoncer la formule de Taylor avec reste intégral.
60. Enoncer le théorème sur les sommes de Riemann.
61. Enoncer le théorème "fondamental" du calcul intégral.
62. Donner la définition d'une série convergente.
63. Donner la nature d'une série géométrique et sa somme en cas de convergence.
64. Soit $\sum u_n$ une série convergente. Montrer qu'alors $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$. Donner un exemple montrant que la réciproque est fausse.
65. Montrer qu'une série à termes positifs converge ssi sa somme partielle est une suite majorée.
66. Enoncer et démontrer le lien suite-série.
67. Somme de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$?
68. Enoncer le théorème de comparaison (critère de domination/majoration/équivalence) pour les séries à termes positifs.
69. Donner la nature des séries de Riemann.
70. Donner la définition d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
71. Donner la définition des dérivées partielles d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, de la dérivée selon un vecteur.
72. Donner le DL à l'ordre 1 en un point $a \in U$ d'une fonction C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
73. Définition du vecteur gradient d'une fonction de classe C^1 .
74. Savoir utiliser la règle de la chaîne pour calculer des dérivées partielles.
75. Définitions d'un point critique, maximum/minimum local ou global d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$.

POLYNOMES :

76. Donner la définition du degré d'un polynôme.
77. Quelles propriétés a-t-on sur le degré d'une somme/ d'un produit de polynômes?
78. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, caractériser de deux façons le fait que $a \in \mathbb{K}$ est racine de P .
79. Définition de l'ordre de multiplicité d'une racine.
80. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, caractériser de deux façons le fait que $a \in \mathbb{K}$ est racine de multiplicité m de P .
81. Définition d'un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$.
82. Expression de la somme et du produit des racines en fonction des coefficients?
83. Enoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
84. Enoncer la formule de Leibniz.
85. Enoncer la formule de Taylor pour les polynômes.

86. Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss.
87. Factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
88. Déterminer le reste de la division euclidienne de $A = X^n + 1$ par $B = X - 3$.
89. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que $X^2 + 1$ divise $X^4 + aX^2 + bX + c$.
90. Factoriser en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^5 - 1$.
91. Trouver deux réels a et b pour que $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$ admette 1 pour racine double.
92. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = (X + 1)^n - (X - 1)^n$. Déterminer les racines de P_n , son degré, son coefficient dominant, puis factoriser P_n en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

ALGÈBRE LINÉAIRE :

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

93. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E . Donner la définition de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
94. À quelle condition une partie A de E est-elle un sous-espace vectoriel de E ?
95. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Donner deux façons de caractériser le fait que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E .
96. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E .
 - (a) Donner la définition mathématique de : $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E .
 - (b) Donner la définition mathématique de : $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.
 - (c) Donner deux façons de caractériser le fait que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .
 - (d) Soit $S = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E . Définir le rang de S .
 - (e) Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E .
97. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$, montrer en utilisant la définition que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
98. Soit $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 0\}$. On ne demande pas de vérifier que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de P et en déduire sa dimension.
99. Soit $G = \text{Vect}((1, 1, 2, 1), (1, 0, 2, 0), (0, 1, 1, 1))$. Déterminer une base de G .
100. Déterminer une équation de $H = \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, -1))$.
101. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs $a = (1, 0, 1)$, $b = (1, 1, -2)$ et $c = (2, -1, 2)$ forment une base et déterminer les coordonnées de $u = (x, y, z)$ dans cette base.
102. Énoncer la proposition sur les bases adaptées à une somme directe $E = F \oplus G$ où F et G désignent des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .
103. Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$.
 - (a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer des bases et la dimension.
 - (b) Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
104. Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P(0) = P(1) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_2[X]$.
105. Que veut dire que E est de dimension finie? Quelle est alors par définition la dimension de E ?
106. Si u est une application de E dans F , que signifie u est linéaire? À quelle condition u est un endomorphisme? Un isomorphisme?
107. Si u est une application linéaire de E dans F donner la définition du noyau et de l'image de u .
108. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Montrer que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im} u$. (2 pts)
109. Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Montrer que u est injective si et seulement si $\text{Ker} u = \{0_E\}$.
110. Soit $\Phi : \begin{array}{l} \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto P - (X - 2)P' \end{array}$.
Montrer que Φ est une application linéaire et déterminer une base de son noyau et de son image.

111. F et G désignent ici deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E tels que $F \oplus G = E$.
- Définir la projection p sur F parallèlement à G et la symétrie s par rapport à F parallèlement à G
 - Soient p et s deux endomorphismes de E . A quelle condition p est-elle une projection de E ? A quelle condition s est-elle une symétrie de E ? Dans ce cas, quelle décomposition de E en somme directe a-t-on?
112. Énoncer le théorème du rang. Version matricielle?
113. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang de A pour que A soit inversible.
114. Soit $S = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E (avec $\dim E = n$). Donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang de S pour que S soit une base de E .
115. Énoncer la formule de changement de bases pour les vecteurs. On précisera bien les notations utilisées.
116. Énoncer la formule de changement de bases pour les applications linéaires. On précisera bien les notations utilisées.
117. Soit $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \mapsto (x + z, y + z, 0)$.
 Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, puis que c'est une projection et déterminer ses éléments caractéristiques (on en donnera une base).
118. Déterminer la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ de $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, t) \mapsto (x + y + z, x - t, 2y + z + 5t)$
119. Soient $f, g \in L(E)$, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Montrer que $f \circ g = 0_{L(E)} \Leftrightarrow \text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$.
120. Définition d'une forme linéaire.
121. Définition d'un hyperplan. Caractérisation?
122. Définition du déterminant d'un endomorphisme? D'une matrice carrée?
123. Pour $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, que valent $\det(AB)$, $\det(\lambda A)$, $\det(A^T)$?
124. Que vaut le déterminant d'une matrice triangulaire?

ESPACES PREHILBERTIENS :

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

125. Donner la définition d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .
126. Définition de la norme associée? Quelles sont ses propriétés?
127. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(./.)$. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cas d'égalité? Démonstration?
128. Donner la définition d'une famille orthogonale? Orthonormale?
129. Énoncer le théorème de Pythagore.
130. Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E , on note $(./.)$ le produit scalaire sur E et $\|.\|$ la norme associée et p_F la projection orthogonale sur F .
- Donner la définition de $F^\perp$
 - Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F . Montrer que : $\forall u \in E, u \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, (u/e_i) = 0$.
 - Soit $S = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E . A quelles conditions S est-elle orthonormale?
 - Soit $x \in E$ et $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F . Donner l'expression du projeté orthogonal $p_F(x)$.
 - Soit $u \in E$. Donner la définition de $d(u, F)$ puis préciser sa valeur en fonction de u .
 - Énoncer l'inégalité de Bessel.
131. Les questions (a) et (b) sont indépendantes.
- On travaille dans $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel :
 - Déterminer une base orthonormale du plan vectoriel $F = \{(x, y, z, t) \in E / x + z + t = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$.

- ii. Déterminer une base orthonormale de l'orthogonal de G où G est le plan vectoriel $G = \{(x, y, z, t) \in E / x + y - z + t = 0 \text{ et } x - 2y + 3z - t = 0\}$.

(b) Dans cette question, $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel :

$$\forall u = (x, y, z), u' = (x', y', z') \in E, (u|u') = xx' + yy' + zz'$$

On note C la base canonique de E .

- i. Soit $n = (1, 1, -1)$ et $D = \text{Vect}(n)$. Déterminer une équation de $H = D^\perp$ le supplémentaire orthogonal de D dans E .
- ii. i. Donner une base orthonormale (a, b) de H .
 ii. Déterminer une base orthonormale de D .
 iii. En déduire une base orthonormale B de E .
- iii. i. Soit le vecteur $u = (3, 2, 1)$. Déterminer son projeté orthogonal u_2 sur H .
 ii. Calculer la distance de u à H .

PROBABILITES :

132. Quel est le nombre de p -uplets d'éléments d'un ensemble de cardinal n ?
133. Quel est le nombre de p -uplets d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n ?
134. Quel est le nombre de parties à p éléments d'un ensemble de cardinal n ?
135. Quel est le nombre de parties d'un ensemble de cardinal n ?
136. Soit Ω un ensemble fini. Donner la définition d'une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
137. A et B étant deux événements, donner la définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B .
138. Enoncer la formule des probabilités composées.
139. Donner la définition d'un système complet d'événements.
140. Enoncer la formule des probabilités totales.
141. Enoncer la formule de Bayes.
142. Expliciter les lois usuelles (uniforme, Bernoulli, binômiale). Pour X une variable aléatoire suivant une loi usuelle, on explicitera $X(\Omega)$, $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$, $E(X)$, $V(X)$ (les calculs doivent savoir être refaits).
143. Donner la définition de l'espérance, de la variance, de l'écart type d'une variable aléatoire.
144. Soient X et Y indépendantes. Montrer que $E(XY) = E(X)E(Y)$.
145. Si X et Y sont deux variables aléatoires, définir la covariance de X et de Y . Que peut-on dire si elles sont indépendantes ?
146. Enoncer le théorème de transfert.
147. Que peut-on dire de la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes ? De $V(aX + b)$ si $a, b \in \mathbb{R}$?
148. Que dit le lemme des coalitions ?
149. Enoncer l'inégalité de Markov.
150. Enoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.