SUITES USUELLES.

Dans la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. SUITES ARITHMETIQUES :

Soit $r \in \mathbb{K}$. $(u_n)_n$ est arithmétique de raison r si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$.

Somme des termes consécutifs :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2} = \frac{(\text{1er terme} + \text{dernier terme}) \times \text{ nombre de termes}}{2}$$

2. SUITES GEOMETRIQUES :

Soit $q \in \mathbb{K}$. $(u_n)_n$ est géométrique de raison q si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n$.

Somme des termes consécutifs : Pour $q \neq 1$,

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q} = q^p . \frac{1 - q^{n+1-p}}{1-q}$$

3. SUITES ARITHMETICO-GEOMETRIQUES.

> Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique si et seulement si
>
> $$\exists (r,q) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K} \setminus \{0,1\},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n + r$$

Méthode pour trouver son terme général :

- Chercher $c \in \mathbb{K}$ tel que la suite $(v_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - c$ est géométrique (de raison q).
- En déduire le terme général de (v_n) puis celui de (u_n).

SUITES RECURRENTES LINEAIRES D'ORDRE DEUX

On cherche le terme général d'une suite définie par u_0, u_1 donnés dans $\mathbb{K}$ et telle qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (*)\ \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

L'équation $r^2 - ar - b = 0$ (E) est l'équation caractéristique associée à la suite $(u_n)_n$. On note Δ son discriminant.
La suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (*) si et seulement si r est racine de (E).

Théorème 2 : cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- Si $\Delta \neq 0$, (E) admet deux racines complexes distinctes r_1 et r_2 et il existe deux complexes λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- Si $\Delta = 0$, (E) admet une racine double r_0 et il existe deux complexes λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n) r_0^n$$

Théorème 2 : cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- Si $\Delta > 0$, (E) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- Si $\Delta = 0$, (E) admet une racine double r_0 et il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n) r_0^n$$

- Si $\Delta < 0$, (E) admet deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ et il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)) r^n$$

L'ensemble $E = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension deux.
Dans les deux cas, les constantes λ et μ sont déterminées par les valeurs des premiers termes u_0 et u_1 qui déterminent la suite $(u_n)_n$ de manière unique.