Révision

— Relation de comparaison et suites numériques —

Utilité

→ connaître le comportement local d'une suite à partir d'un certain rang
(limite, levée d'indéterminée "$0\times\infty$" , "$\frac{\infty}{\infty}$" , "$1^{+\infty}$")
→ outil indispensable pour l'étude des séries

Définitions : Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes non nuls, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes

1) relation de domination : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$u_n = \bigcirc(\alpha_n) \iff$ il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée telle que $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n = b_n\alpha_n$

$\iff \left(\dfrac{u_n}{\alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée

$\iff \exists M>0\,\forall n\in\mathbb{N}\mid u_n\mid\le M\mid\alpha_n\mid$

2) relation de prépondérance : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$u_n = \circ(\alpha_n) \iff$ il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $\forall n\ u_n = \epsilon_n\alpha_n$

$\iff \left(\dfrac{u_n}{\alpha_n}\right)$ est une suite de limite nulle

$\iff \forall\epsilon>0\,\exists n_0\,\forall n\ge n_0\mid u_n\mid\le\epsilon\mid\alpha_n\mid$

3) équivalences de deux suites : soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels ou complexes non nuls

$u_n\sim v_n \iff u_n - v_n = \circ(v_n)$

$\iff \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)=1$

$\iff$ il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1 telle que $\forall n\ u_n = \varphi_n v_n$

Exemples :

$u_n = \bigcirc(1)$ signifie (u_n) est une suite bornée

$u_n = \circ(1)$ signifie $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

$u_n \sim 1$ signifie $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$

Remarques : $\boxed{u_n=\circ(v_n)\Rightarrow u_n=\bigcirc(v_n)}$ $\boxed{u_n\sim v_n\Rightarrow u_n=\bigcirc(v_n)\text{ et }v_n=\bigcirc(u_n)}$

Comparaisons des suites de référence : $n\mapsto n^\alpha$, $n\mapsto(\ln n)^\beta$, $n\mapsto n!$ (Limites classiques à connaître)

$\boxed{\alpha>0,\beta>0\,,\ \lim\limits_{n\to+\infty}(\ln n)^\beta n^{-\alpha}=0}$ donc $\boxed{\alpha>0,\beta>0\ ,\ (\ln n)^\beta=\circ(n^\alpha)}$ (α,β fixés (indépendants de n))

$\boxed{\gamma>0,\alpha\in\mathbb{R}\,,\ \lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha e^{-\gamma n}=0}$ donc $\boxed{\gamma>0,\alpha\in\mathbb{R}\ ,\ n^\alpha=\circ(e^{\gamma n})}$ (γ,α fixés (indépendants de n)

$\boxed{\gamma>0,\alpha\in\mathbb{R}\,,\ \lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha e^{-\gamma n}=0}$ donc $\boxed{\gamma>0,\alpha\in\mathbb{R}\,,\ \ e^{-\gamma n}=\circ\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)}$ (γ,α fixés)

$\boxed{0<a<1,\alpha\in\mathbb{R}\,,\ \lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha a^n=0}$ donc $\boxed{0<a<1,\alpha\in\mathbb{R}\,,\ \ a^n=\circ\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}$ (a,α fixé)

Règles de calcul pour les relations de domination et de prépondérance :

– transitivité : $\boxed{\left.\begin{array}{l}u_n=\bigcirc(v_n)\\ v_n=\bigcirc(w_n)\end{array}\right\}\Longrightarrow u_n=\bigcirc(w_n)}$, $\boxed{\left.\begin{array}{l}u_n=\circ(v_n)\\ v_n=\circ(w_n)\end{array}\right\}\Longrightarrow u_n=\circ(w_n)}$

– transitivité mixte : $\boxed{\left.\begin{array}{l}u_n=\bigcirc(v_n)\\ v_n=\circ(w_n)\end{array}\right\}\Longrightarrow u_n=\circ(w_n)}$, $\boxed{\left.\begin{array}{l}u_n=\circ(v_n)\\ v_n=\bigcirc(w_n)\end{array}\right\}\Longrightarrow u_n=\circ(w_n)}$

– stabilité par produit : $\boxed{\left.\begin{array}{l}u_n=\bigcirc(x_n)\\ v_n=\bigcirc(y_n)\end{array}\right\}\Longrightarrow u_nv_n=\bigcirc(x_ny_n)}$, $\boxed{\left.\begin{array}{l}u_n=\circ(x_n)\\ v_n=\circ(y_n)\end{array}\right\}\Longrightarrow u_nv_n=\circ(x_ny_n)}$

– somme : $\boxed{\left.\begin{array}{l}u_n=\circ(v_n)\\ w_n=\circ(v_n)\end{array}\right\}\Longrightarrow u_n+w_n=\circ(v_n)}$, $\boxed{\left.\begin{array}{l}u_n=\bigcirc(v_n)\\ w_n=\bigcirc(v_n)\end{array}\right\}\Longrightarrow u_n+w_n=\bigcirc(v_n)}$

– produit par un scalaire : $\boxed{\left.\begin{array}{c} u_n = \circ(v_n) \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda u_n = \circ(v_n)}$, $\boxed{\left.\begin{array}{c} u_n = \bigcirc(v_n) \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda u_n = \bigcirc(v_n)}$

– limite : $\boxed{\left.\begin{array}{c} u_n = \bigcirc(v_n) \\ \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0}$

Règles de calcul pour les équivalents pour des suites de nombres non nuls

– $\boxed{\left.\begin{array}{c} u_n = \alpha_n + v_n \\ v_n = \circ(\alpha_n) \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \sim \alpha_n}$

application : on pourra utiliser un développement limité de u_n pour déterminer un équivalent de u_n par exemple :

$$u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right) \Longrightarrow u_n \sim \frac{1}{n^2}$$

– transitivité $\boxed{\left.\begin{array}{c} u_n \sim v_n \\ v_n \sim w_n \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \sim w_n}$

– stabilité par produit : $\boxed{\left.\begin{array}{c} u_n \sim v_n \\ x_n \sim y_n \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n x_n \sim v_n y_n}$ – stabilité par quotient : $\boxed{\left.\begin{array}{c} u_n \sim v_n \\ x_n \sim y_n \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{u_n}{x_n} \sim \frac{v_n}{y_n}}$

– stabilité par puissance <u>fixe</u> : (u_n), (v_n) étant des suites de nombres réels strictement positifs , α un réel <u>fixé</u> alors :

$$\boxed{u_n \sim v_n \Longrightarrow u_n^\alpha \sim v_n^\alpha}$$

– stabilité par passage au module : $\boxed{u_n \sim v_n \Longrightarrow |u_n| \sim |v_n|}$

– équivalent et limite : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L \in \mathbb{R}^* \Longrightarrow u_n \sim L}$,

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} u_n \sim v_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} v_n = L}$$

– signe d'une suite réelle à partir d'un certain rang : (u_n), (v_n) étant des suites réelles

$\boxed{u_n \sim v_n \Longrightarrow \text{à partir d'un certain rang } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont de même signe}}$

$$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L \text{ et } L > 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{à partir d'un certain rang } n_0 \\ (u_n) \text{ est minorée par un nombre strictement positif} \end{array}\right.}$$

– équivalent et logarithme : (u_n), (v_n) étant des suites de nombres réels strisctement positifs

$$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1 \Longrightarrow \ln(u_n) \sim u_n - 1}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{n\to\infty} u_n = L \in (\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}) \setminus \{1\} \\ u_n \sim v_n \end{array}\right\} \Longrightarrow \ln(u_n) \sim \ln(v_n)}$$

MISE EN GARDE

(1) $(u_n = \circ(v_n) \text{ et } x_n = \circ(y_n) \not\Rightarrow (u_n + x_n = \circ(v_n + y_n))$

(2) $(u_n = \bigcirc(v_n) \text{ et } x_n = \bigcirc(y_n) \not\Rightarrow (u_n + x_n = \bigcirc(v_n + y_n))$

(3) $(u_n \sim v_n \text{ et } x_n \sim y_n) \not\Rightarrow (u_n + x_n \sim v_n + y_n)$

<u>Méthode</u> : pour chercher l'équivalent d'une somme
→ soit factoriser par le terme prépondérant et utiliser les règles valables pour le produit
→ soit utiliser des développements limités au même ordre de chaque terme

(4) pas de règle pour la composition
$u_n \sim v_n \not\Rightarrow \exp(u_n) \sim \exp(v_n)$
$u_n \sim v_n \not\Rightarrow f(u_n) \sim f(v_n)$
$u_n \sim v_n \not\Rightarrow u_n^n \sim v_n^n$ (source d'erreur fréquente)

(5) une suite équivalente à une suite monotone n'est pas nécessairement monotone (même à partir d'un certain rang)