FORMULAIRE DE TRIGONOMÉTRIE.

• **Rappels**.

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2 + b^2 = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$
θ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$
Les fonctions cos et sin sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques, tan est continue et dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, sin et tan sont impaires, cos est paire et:

$$(\sin)' = \cos\,,\ (\cos)' = -\sin\,,\ \text{et } \forall\theta \in D,\ (\tan)'(\theta) = 1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$$

On a:

- $\forall\theta \in \mathbb{R},\ \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$
- $\forall\theta \in \mathbb{R},\ -1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$
- $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ et $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$
- $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ pour $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $\text{cotan}(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ pour $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

• **Formule d'Euler:** $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

• **Formules de Moivre:** Pour $p \in \mathbb{Z}$, $e^{i\theta p} = (e^{i\theta})^p = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^p = \cos(p\theta) + i\sin(p\theta)$

• **Angles associés:**

Angles opposés	**Angles supplémentaires**	**Angles complémentaires**
$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta)$
$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$	$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta)$
$\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \text{cotan}(\theta)$

Angles qui diffèrent de π	**Angles qui diffèrent de $\frac{\pi}{2}$**
$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin(\theta)$
$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos(\theta)$
$\tan(\pi + \theta) = \tan(\theta)$	$\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\text{cotan}(\theta)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.

• **Formules d'addition:**

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \qquad \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a \qquad \sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}, \qquad \tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$$

• **Formules de duplication:**

$$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a) \text{ et } \sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$$

$$\tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

• **Formules de linéarisation:**

$$\cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$

• **Résolution d'équations trigonométriques:** Pour $a\in\mathbb{R}$,

$$\cos(x)=\cos(a)\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=a+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ \text{ ou}\\ x=-a+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \qquad \sin(x)=\sin(a)\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=a+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ \text{ ou}\\ x=\pi-a+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Pour $a\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, $\tan(x)=\tan(a)\Longleftrightarrow x=a+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

• **Transformation de produits en sommes et de sommes en produits:**

$$\begin{array}{rl|rl}
\cos(a)\cos(b) = & \frac{1}{2}(\cos(a-b)+\cos(a+b)) & \sin(p)+\sin(q)= & 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}))\\
\sin(a)\sin(b) = & \frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b)) & \sin(p)-\sin(q)= & 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2}))\\
\sin(a)\cos(b) = & \frac{1}{2}(\sin(a-b)+\sin(a+b)) & \cos(p)+\cos(q)= & 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}))\\
 & & \cos(p)-\cos(q)= & -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2}))
\end{array}$$

• **Expression de la tangente en fonction de l'arc moitié:**

En posant $t=\tan(\frac{x}{2})$, on obtient quand cela a un sens:

$$\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \ \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2},\ \ \tan(x)=\frac{2t}{1-t^2}$$