Exercice 1

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme sur I de la suite de fonctions (f_n) dans les cas suivants :

1. $f_n : x \mapsto \dfrac{n+1}{n^2+x^2}$ $\quad I = \mathbf{R}$.
2. $f_n : x \mapsto \dfrac{nx^2}{1+nx}$ $\quad I = [0,1]$.
3. $f_n : x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{nx^2}{1+nx}\right)$ $\quad I = [0,+\infty[$.
4. $f_n : x \mapsto \sin\left(\dfrac{n+1}{n}x\right)$ $\quad I = \mathbf{R}$ $\quad$ puis $I = [-a,a]$, avec $a > 0$.
5. $f_n : x \mapsto n\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$ $\quad I = \mathbf{R}$ $\quad$ puis $I = [0,a]$ avec $a > 0$.
6. $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ $\quad I = \mathbf{R}$ $\quad$ puis $I = [a,+\infty[$ avec $a > 0$.
7. $f_n : x \mapsto \begin{cases} x^n\ln(x) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\quad I = [0,1]$.

Exercice 2

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad f_n : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{nx^2}{1+nx} \text{ si } x \geqslant 0 \\[2ex] \dfrac{n^2x^3}{1+n^2x^2} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que la suite (f_n') converge simplement sur $\mathbf{R}$ mais pas uniformément sur $[-1,1]$.

Exercice 3

Soit, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n : x \mapsto n\cos^n x \sin x$.

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\mathrm{d}t$. La suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$?
3. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout segment de $]0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 4

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur un segment $[a,b]$ vers la fonction nulle.

Montrer que si $\forall n \in \mathbf{N}$ $\quad f_n$ est décroissante sur $[a,b]$, alors il y a convergence uniforme sur $[a,b]$.

Exercice 5

Soit (P_n) une suite de fonctions polynômialess de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbf{R}$.

1. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ $\quad \forall n \geqslant n_0, \quad \|f - P_n\|_\infty^{\mathbf{R}} \leqslant 1$.
2. En déduire que, pour tout $n \geqslant n_0$, la fonction $P_n - P_{n_0}$ est bornée sur $\mathbf{R}$. Qu'en concluez-vous ?
3. Montrer que la fonction f est polynomiale.

Exercice 6

On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur $[0,1]$ par : $f_0 : x \mapsto 1$ et
$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in [0,1], \quad f_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x f_n(t-t^2)\mathrm{d}t.$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant f_{n+1}(x) - f_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
2. En déduire la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur $[0,1]$. On note f la fonction limite.
3. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
4. En déduire que la fonction f est solution sur $[0,1]$ de l'équation différentielle :
   $y'(x) = y(x-x^2)$.

Exercice 7

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln\left(e^x + \frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}\mathrm{d}x$.

Exercice 8

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ pour $t \in [0,1]$.
2. On pose $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall t \in [0,1] \quad g_n(t) = \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n e^t$.
   (a) Montrer que $\forall t \in [0,1] \quad |g_n'(t)| \leqslant \dfrac{e^t}{n}$.
   (b) En déduire que $\forall t \in [0,1] \quad \left|\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n e^t - 1\right| \leqslant \dfrac{te^t}{n}$.
3. On pose $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in [0,1] \quad I_n(x) = \displaystyle\int_0^x g_n(t)\mathrm{d}t$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (I_n) sur $[0,1]$.
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (I_n) sur $[0,1]$.

Exercice 9

1. Soit (g_n) une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbf{C}$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}$ g_n est bornée et (g_n) converge uniformément vers une fonction g.
   Montrer que g est bornée.
2. On considère f_n définie sur $\mathbf{R}$ par : $f_n(x) = \begin{cases} nx^2 & \text{si } |x| \leqslant \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > \dfrac{1}{n} \end{cases}$
   Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f.
   (f_n) converge-t-elle uniformément ?