Partie I : Intégrales de Wallis

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on définit $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n \, \mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Etudier la monotonie de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$.
4. Exprimer W_{n+2} en fonction de W_n.
5. Montrer que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante dont on donnera la valeur.
6. Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$ pour n au voisinage de $+\infty$ (*on pourra faire apparaître un encadrement*). En déduire que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
7. Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer W_{2n} et W_{2n+1} à l'aide de factorielles.

Partie II : Formule de Stirling

On considère la fonction $f : t \mapsto -\ln(t)$ et on définit la suite $(\omega_n)_{n\geqslant 2}$ par :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \omega_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 2, \quad \omega_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{2t} + \int_{n-1}^{n} \frac{t-n+\frac{1}{2}}{t}\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 2 \quad \omega_n = \dfrac{1}{2}\left[\ln(n) - \ln(n-1)\right] - \delta_n$ avec $\delta_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{(n-t)(1-(n-t))}{2t^2}\mathrm{d}t$.
3. Justifier que $\forall n \geqslant 2 \quad 0 \leqslant \delta_n \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{8t^2}\mathrm{d}t$.
4. En déduire la convergence de la série $\sum \delta_n$.
5. Montrer que : $\forall p \geqslant 2, \quad \ln(p!) = \dfrac{1}{2}\ln(p) + \displaystyle\int_1^p \ln(t)\mathrm{d}t - \sum_{n=2}^{p} \delta_n$.
6. En déduire l'existence d'un réel strictement positif a tel que :
$$p! \sim_{+\infty} a.p^{p+\frac{1}{2}}.e^{-p}$$
7. En utilisant l'équivalent précédent et l'expression de W_{2n} trouvée en partie I question 7, justifier l'équivalent :
$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$