Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point et $\mathbf{K}$ désigne le corps des réels ou des complexes.
On considère alors une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbf{N},\quad f_n$ est définie sur I et est à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Si $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{K}$ est bornée sur I, on notera $\|f\|_\infty^I = \underset{x\in I}{Sup}|f(x)|$.

Comme pour les séries numériques, à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on associe la série de fonctions $\sum f_n$ et la suite des sommes partielles $(S_p)_{p\in\mathbf{N}}$ associée, qui est la suite de fonctions :

$$\forall p \in \mathbf{N},\quad S_p : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbf{K} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{p} f_n(x) \end{array}$$

Exemples :

- Si $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n!}$ alors, $\forall p \in \mathbf{N}^*,\quad S_p : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{x^n}{n!}$. On sait que $\forall x \in \mathbf{R},\quad \lim_{p\to+\infty} S_p(x) = e^x$.
- Si $f_n : x \mapsto x^n$ alors, $S_p : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{p} x^n = \begin{cases} \dfrac{1-x^{p+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

  On sait que la suite $(S_p(x))_{p\in\mathbf{N}}$ converge si et seulement si $|x| < 1$, et dans ce cas $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} S_p(x) = \frac{1}{1-x}$.

1 Modes de convergence

1.1 Convergence simple sur un intervalle

Definition 1.1

> On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** l'intervalle I si et seulement si pour tout x de I la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.
>
> Ce qui revient à dire que la suite de fonctions $(S_p)_{p\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur I.

Dans ce cas,

- on définit la fonction $S : x \in I \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{p\to+\infty} S_p(x)$, appelée **somme de la série de fonctions** et notée $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$,
- on définit la fonction $R_p = S - S_p : x \in I \mapsto \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n(x)$, appelée **reste d'ordre** p de la série de fonctions et notée $R_p = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n$.

Remarque 1.1

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I alors :

- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur I,
- la suite des restes $(R_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions qui converge simplement vers la fonction nulle sur I.

Remarque 1.2

Si $\forall n \in \mathbf{N}$, f_n est définie sur I alors , la série de fonctions $\sum f_n$ peut ne converger que sur un sous-ensemble $D \subset I$, D est alors appelé le domaine de définition de la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Exemple 1.1

Reprise des deux exemples donnés au début.

Regarder la convergence simple sur $]0, +\infty[$ lorsque : $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x}{n+x}$.

1.2 Convergence uniforme sur un intervalle

Definition 1.2

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément sur** l'intervalle I si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_p)_{p\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur I.

Proposition 1.1

La série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur I si et seulement si elle converge simplement et la suite des restes $\left(R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n\right)_{p\in\mathbf{N}}$ **converge uniformément** sur I vers la fonction nulle,

c'est-à-dire si et seulement si $\lim_{p\to+\infty} \|S - S_p\|_\infty^I = \lim_{p\to+\infty} \|R_p\|_\infty^I = \lim_{p\to+\infty} \left\| \sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n \right\|_\infty^I = 0$.

Exemple 1.2

Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x}$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $I =]0, +\infty[$.

Proposition 1.2

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

Exemple 1.3

La série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n : x \mapsto x^n$ ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$, mais converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset]-1, 1[$.

1.3 Convergence normale sur un intervalle

Definition 1.3

On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions définies sur I, on note, sous réserve d'existence, $\|f_n\|_\infty^I = \underset{x\in I}{Sup}|f_n(x)|$.

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement sur** I si, et seulement si

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbf{N} \quad f_n \text{ est bornée sur } I \\ \text{ et} \\ \text{la série numérique } \sum \|f_n\|_\infty^I \text{converge} \end{cases}.$$

Remarque 1.3 *Convergence normale et convergence absolue en tout point*

On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions sur I.

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I alors $\forall x\in I,\quad \sum f_n(x)$ converge absolue.

On en déduit que la convergence normale sur I entraine la convergence simple sur I.

Proposition 1.3

On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions sur I.

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I alors elle converge uniformément sur I.

Remarque 1.4

Il n'y a pas la réciproque pour la propriété précédente : la série de fonctions $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$ mais pas normalement.

Plan d'étude d'une série de fonctions :

- On étudie **d'abord la convergence normale** de $\sum f_n$ sur I
  :
  — soit on trouve $\|f_n\|_\infty^I$ (par étude de fonction),
  — soit on trouve une suite (a_n) de réels positifs indépendants de x telle que $\forall x\in I,\quad |f_n(x)|\leqslant a_n$ et $\sum a_n$ converge.

S'il n'y a pas convergence normale sur I :

- On étudie **la convergence simple** de la série de fonctions $\sum f_n$.

  S'il y a convergence simple alors on étudie **la convergence uniforme** sur I :
  — on peut regarder si la suite (f_n) converge uniformément vers 0, si ce n'est pas le cas, il n'y a pas convergence uniforme de $\sum f_n$ sur I,

— on essaie de trouver (a_n) indépendante de x telle que :
$\forall x \in I, \quad \left| R_p(x) = \sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \leqslant a_p$ avec a_p qui converge vers 0 (critère spécial des séries alternées, comparaison série-intégrale, ou autre)

— on essaie de trouver (a_n) indépendante de x telle que :
$\forall x \in I, \quad \left| R_p(x) = \sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \geqslant a_p \geqslant 0$ avec (a_n) qui ne converge pas vers 0, alors $\sum f_n$ ne convergera pas uniformément sur I.

Exemple 1.4

1. Étude des différents modes de convergence sur $\mathbf{R}$ des séries de fonctions $\sum f_n$ et $\sum g_n$ lorsque :
$f_n(x) = \dfrac{\sin(2^n \pi x)}{2^n}$ et $g_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$.

2. • Déterminer l'intervalle le plus grand sur lequel la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement lorsque $f_n(x) = e^{-n^2 x}$, étudier ensuite les autres modes de convergence sur cet intervalle.
• Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{e^{nx}}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et que $\forall a < 0 \quad \exists x \in]-\infty, a], \quad \sum f_n(x)$ diverge. Étudier les différents mode de convergence de $\sum f_n$ sur $]0, +\infty[$.

3. Étude des mode de convergences sur $[1, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum f_n$ avec
$f_n : x \mapsto (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2}$.

2 Propriétés de la fonction somme en cas de convergence uniforme

Proposition 2.1 **Continuité par convergence uniforme**

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I.

Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N}, \quad f_n \text{ est continue sur } I \\ \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I \end{cases}$ alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

Proposition 2.2 *Extension au cas de la convergence uniforme sur tout segment*

La propriété précédente reste vraie si on remplace la convergence uniforme sur I par la convergence uniforme sur tout segment inclus dans I.

La continuité en un point a est une notion locale, la convergence uniforme sur tout segment est donc suffisante.

Exemple 2.1

La fonction $\exp : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est continue sur $\mathbf{R}$.

Proposition 2.3 Théorème d'inversion limite et $\sum$

Admis

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I et soit a une extrémité de I.

Si :

- chaque f_n admet une limite finie ℓ_n en a

et

- la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I

Alors

la série numérique $\sum \ell_n$ converge et $\boxed{\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)}$

On peut remplacer la convergence uniforme sur I par la convergence uniforme sur un intervalle d'extrémité a inclus dans I.

Exemple 2.2

- La fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx+1}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 1$.
- Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ avec $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$.

  La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ mais pas uniformément sur $]1, +\infty[$.

Proposition 2.4 Intégration terme à terme sur un segment

Soit $(f_n)_n$ une suite de **fonctions continues** sur un segment $[a, b]$.

Si la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément sur le segment** $[a, b]$ alors :

- la série $\sum \int_a^b f_n(t)dt$ est convergente

  et

- $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t}$

Exemple 2.3

Montrer que $\forall x \in]-1,1[\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.

Puis en déduire que $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Proposition 2.5 **Dérivation terme à terme**

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I.

Si
- $\forall n \in \mathbf{N} \quad f_n$ est de classe C^1 sur I,
- la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I,
- la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I (ou sur I)

Alors

la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\boxed{S' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'}$

Exemple 2.4

La fonction exponentielle $\exp : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x)$

Proposition 2.6 *Extension à la classe C^k*

Soit $k \in \mathbf{N}^*$.

Si
- $\forall n \in \mathbf{N} \quad f_n$ est de classe C^k sur I,
- pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I,
- la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I (ou sur I)

Alors

la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^k sur I et $\boxed{\forall j \in [\![0, k]\!] \quad S^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}.}$

Pour montrer qu'une somme de série de fonctions $\sum f_n$ est de classe C^∞ sur I, on montre que $\sum f_n$ converge simplement sur I et que $\forall k \in \mathbf{N}^* \quad \sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I.