Exercice 1

On pose $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

1. La série de fonctions $\sum f_n$ est-elle simplement convergente sur $\mathbf{R}$, sur $\mathbf{R}^+$?
2. Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbf{R}^+$.

Exercice 2

$\forall n \in \mathbf{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbf{R} \mapsto \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2}$.

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbf{R}^*$ de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Étudier la convergence uniforme sur $\mathbf{R}_+^*$ de $\sum f_n$, puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 3

Soit $f_n : x \in [0, +\infty[\mapsto nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2. $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbf{R}^+$? Justifier.

Exercice 4

Pour tout $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n + n^3 x^2}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
2. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $]0, +\infty[$?
3. Montrer que $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5

On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.
2. Étudier la continuité de S sur son ensemble de définition.
3. Montrer que S est décroissante par deux méthodes.
4. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
5. Déterminer un équivalent simple de S en 0.

   On pourra utiliser une comparaison série-intégrale en encadrant $\displaystyle\int_k^{k+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt$.

Exercice 6

Pour $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geqslant 2$, soit $f_n : x \mapsto \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de la série de fonctions de terme général f_n.

   On pose, pour $x \in D$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$.
2. Montrer qu'il n'y a pas convergence normale de la série de fonctions sur D.
3. Si $n \geqslant 2$, soit $R_n : x \in D \mapsto \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Montrer que : $\forall x \in D, \quad |R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\ln n}$.
4. La fonction S est-elle continue sur D ?

Exercice 7

On définit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.

Exercice 8

On définit la fonction f de la variable réelle x par $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

1. Donner l'ensemble de définition D de f et montrer que F est continue sur D.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur D, puis donner sa dérivée.
3. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
4. Soit $x > 0$. Montrer que $1+2F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right)$, puis $\dfrac{1}{2^x} - 1 \leqslant 1+2F(x) \leqslant 0$.

   Déterminer alors la limite de f en 0.
5. Montrer que $\forall x > 1, \quad F(x) = \left(\dfrac{1}{2^{x-1}} - 1\right)\zeta(x)$, où ζ est la fonction zêta de Riemann.

Exercice 9

Soit $a \in \mathbf{R}$, pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $f_n : x \mapsto a^n \dfrac{\cos(nx)}{n!}$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbf{R}$.
2. Déterminer S la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.
3. Calculer, pour $p \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} S(x)\cos(px)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} S(x)\sin(px)\mathrm{d}x$.

Exercice 10

1. Soit $k \in \mathbf{Z}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ikt}\mathrm{d}t$.
2. Soit $p \in \mathbf{Z}$. En considérant une série de fonctions, calculer $I_p = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{ipt}}{2+e^{it}}\mathrm{d}t$.

   On pourra utiliser le développement suivant : si $q \in \mathbf{C}$ vérifie $|q| < 1$ alors $\dfrac{1}{1-q} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$.