Problème : A partir de C.N.M. 2009

Résultats admis : $\boxed{\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ et on note alors } \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

A - Quelques résultats préliminaires

A-1 Soit $b \in \mathbf{R}^+$, la fonction $t \mapsto t^2e^{-t^2}$ est continue sur $[0,b]$ et on remarque que :

$$\int_0^b t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^b t(te^{-t^2})\mathrm{d}t$$

Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\frac{e^{-t^2}}{2}$ sont de classe C^1 sur $[0,b]$ avec $u'(t) = t$ et $v'(t) = te^{-t^2}$, alors par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned}\int_0^b t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t &= \int_0^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t\\ &= [u(t)v(t)]_0^b - \int_0^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t\\ \int_0^b t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t &= -\frac{b^2}{2}e^{-b^2} + \frac{1}{2}\int_0^b e^{-t^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Par croissances comparées $\lim_{b\to+\infty} b^2e^{-b^2} = 0$, et par hypothèse $\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on en déduit que $\boxed{\lim_{b\to+\infty}\int_0^b t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.}$

A-2 La fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
On sait que la fonction exponentielle admet un développement limité en 0 à l'ordre 2 donné par $e^u = 1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)$, alors $e^{-t^2} = 1-t^2+o(t^2)$ au voisinage de 0 et donc $\lim_{t\to0}\frac{1-e^{-t^2}}{t^2} = 1$.

$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} \text{ est continue sur }]0,+\infty[\text{ et se prolonge par continuité en } 0.}$

Soit $0 < a < b$, les fonctions $u : t \mapsto 1-e^{-t^2}$ et $v : t \mapsto \frac{-1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[a,b]$ avec $u'(t) = 2te^{-t^2}$ et $v'(t) = \frac{1}{t^2}$, alors par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\mathrm{d}t &= \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t\\ &= [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1-e^{-a^2}}{a} + \frac{1-e^{-b^2}}{b} + \int_a^b 2e^{-t^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On peut écrire $\dfrac{1-e^{-a^2}}{a} = a.\dfrac{1-e^{-a^2}}{a^2}$ et par le prolongement par continuité vu précédemment on obtient $\lim\limits_{a\to 0^+} \dfrac{1-e^{-a^2}}{a} = 0$. Et par continuité de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ sur $\mathbf{R}$, on a :

$$\lim_{a\to 0}\int_a^b \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1-e^{-b^2}}{b} + 2\int_0^b e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

Par opérations sur les limites : $\lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{1-e^{-b^2}}{b} = 0$, et en utilisant le résultat admis au début de l'énoncé cela donne $\boxed{\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\lim\limits_{a\to 0}\int_a^b \dfrac{1-e^{-t^2}}{t^2}\mathrm{d}t\right) = 0 + 2\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}}$

A-3 (a) <u>1ère méthode :</u>
La fonction logarithme est concave sur $]0,+\infty[$ puisque sa dérivée seconde y est négative. On en déduit que la courbe de la fonction ln est en dessous de toutes ses tangentes, particulièrement celle en $x=1$ qui est d'équation $y = \ln'(1)(x-1)+\ln(1)$, soit $y = x-1$.

$\boxed{\text{Pour tout réel } x>0, \quad \ln(x) \leqslant x-1.}$

<u>2nde méthode :</u> La fonction $f : x \mapsto \ln(x) - x + 1$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ par combinaison linéaire de fonctions usuelles avec $\forall x > 0 \quad f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$ alors f est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$, on a donc $\forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) \leqslant f(1)$. Or $f(1) = 0$ donc $\forall x > 0 \quad \ln(x) - x + 1 \leqslant 0$, ce qui donne $\ln(x) \leqslant x-1$.

(b) • Pour $n \in \mathbf{N}^*$, si $u = n$, alors $e^{-u} - \left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n = e^{-n} \geqslant 0$.

• Soit $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $u \in [0,n[$, on a $x = 1-\dfrac{u}{n} \in]0,+\infty[$ donc $\ln\left(1-\dfrac{u}{n}\right) \leqslant 1-\dfrac{u}{n}-1$, en multipliant par $n>0$, on a $n\ln\left(1-\dfrac{u}{n}\right) \leqslant -u$, et la fonction exp étant croissante sur $\mathbf{R}$, on obtient :

$$\exp\left(n\ln\left(1-\frac{u}{n}\right)\right) \leqslant e^{-u} \text{ ou encore } \left(1-\frac{u}{n}\right)^n \leqslant e^{-u}$$

Finalement $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall u \in [0,n] \quad e^{-u} - \left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n \geqslant 0.}$

A-4 (a) 1ère méthode :

La fonction exp est convexe sur $\mathbf{R}$ (sa dérivée seconde est positive), la courbe de la fonction exp est donc au-dessus de toutes ses tangentes, particulièrement au dessus de sa tangente au point d'abscisse 0 qui a pour équation $y = \exp'(0)(x-0) + \exp(0)$,

ce qui donne $\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad e^x \geqslant x+1.}$

2nde méthode :

La fonction $g : x \mapsto e^x - x - 1$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ avec $\forall x \in \mathbf{R} \quad g'(x) = e^x - 1$. On a par croissance de la fonction exp : $g'(x) \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$. La fonction g est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$ alors $\forall x \in \mathbf{R} \quad g(x) \geqslant g(0)$, ce qui donne $e^x - x + 1 \geqslant 0$ ou encore $\forall x \in \mathbf{R} \quad e^x \geqslant x+1$.

(b) Par l'inégalité précédente et par croissance de la fonction puissance n sur $\mathbf{R}^+$, on obtient pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $t \in [0,1]$
$(e^t)^n \geqslant (1+t)^n$, puis par produit par le réel positif $(1-t)^n$, on obtient :
$(1-t)^n\, e^{nt} \geqslant (1-t)^n.(1+t)^n$, ce qui donne finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall t \in [0,1] \quad (1-t)^n\, e^{nt} \geqslant (1-t^2)^n}$$

(c) 1ère méthode : étude de fonction

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction $h : t \mapsto (1-t^2)^n - 1 + nt^2$ est dérivable sur $[0,1]$ avec

$$\forall t \in [0,1] \quad h'(t) = -2nt(1-t^2)^{n-1} + 2nt = 2nt\left(1 - (1-t^2)^{n-1}\right)$$

$$t \in [0,1] \Longrightarrow t^2 \in [0,1] \Longrightarrow (1-t^2) \in [0,1] \Longrightarrow (1-t^2)^{n-1} \in [0,1]$$

alors $\forall t \in [0,1] \quad h'(t) \geqslant 0$. La fonction h est croissante sur $[0,1]$ donc
$\forall t \in [0,1] \quad h(t) \geqslant h(0)$, ce qui donne $(1-t^2)^n - 1 + nt^2 \geqslant 0$ ou encore $(1-t^2)^n \geqslant 1 - nt^2$.

2nde méthode : formule $a^n - b^n$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbf{R}^2 \quad a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$, donc pour $t \in [0,1]$

$(1-t^2)^n - 1 = (1-t^2-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1-t^2)^k$. Pour $t \in [0,1] \quad 0 \leqslant 1-t^2 \leqslant 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1-t^2)^k \leqslant n$

et $(1-t^2) - 1 = -t^2 \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1-t^2)^k \geqslant -nt^2$. $\boxed{\text{Finalement } (1-t^2)^n \geqslant 1 - nt^2.}$

3ème méthode : récurrence

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, notons $(\mathcal{P}(n)$ la propriété : $\forall t \in [0,1] \quad (1-t^2)^n \geqslant 1 - nt^2$.
• Pour $n = 1$ on a $\forall t \in [0,1] \quad (1-t^2)^1 = 1 - t^2 \geqslant 1 - t^2$. Donc la propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
• Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.

$\forall t \in [0,1]$, $(1-t^2)^{n+1} = (1-t^2)^n.(1-t^2)$. Par hypothèse $(1-t^2)^n \geqslant 1-nt^2$, or $(1-t^2) \geqslant 0$ pour $t \in [0,1]$, donc par produit $(1-t^2)^{n+1} \geqslant (1-nt^2)(1-t^2)$.

$$(1-nt^2)(1-t^2) = 1-nt^2-t^2+nt^4 = 1-(n+1)t^2+nt^4 \geqslant 1-(n+1)t^2$$

alors $(1-t^2)^{n+1} \geqslant (1-nt^2)(1-t^2) \geqslant 1-(n+1)t^2$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence on a bien : $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad (1-t^2)^n \geqslant 1-nt^2$.

1. Soit $n \geqslant 1$ et $u \in [0,n]$, on a $t = \dfrac{u}{n} \in [0,1]$ et par A-4(b) et A-4(c) on peut écrire

$$\left(1-\frac{u}{n}\right)^n e^u \geqslant \left(1-\frac{u^2}{n^2}\right)^n \geqslant 1-\frac{u^2}{n}$$

En multipliant par le réel positif e^{-u}, cela donne :

$$\left(1-\frac{u}{n}\right)^n \geqslant e^{-u} - \frac{u^2}{n}e^{-u}$$

ou encore $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall u \in [0,n] \quad e^{-u} - \left(1-\frac{u}{n}\right)^n \leqslant \frac{u^2 e^{-u}}{n}.}$

B-Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n et tout réel α, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \mathrm{d}t; \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \text{ si } n \geqslant 1 \text{ et } \binom{\alpha}{0} = 1$$

B-1 (a)

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

et

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Pour $n \in \mathbf{N}$, la fonction $t \mapsto \cos^n(t)$ est continue, positive et non identiquement nulle alors par propriété de positivité de l'intégrale, $I_n > 0$.

(b) Soit $n \geqslant 2$, les fonctions $u : t \mapsto \cos^{n-1}(t)$ et $v : t \mapsto \sin(t)$ sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avec $u'(t) = -(n-1)\sin(t)\cos^{n-2}(t)$ et $v'(t) = \cos(t)$, alors par intégration par parties

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\ &= [u(t)v(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(t)v(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_n &= 0-0+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\cos^{n-2}(t)\mathrm{d}t \\ &\quad \text{or } \sin^2(t)=1-\cos^2(t) \text{ alors par linéarité} \\ I_n &= (n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement $\boxed{nI_n=(n-1)I_{n-2}.}$

(c) En multipliant l'égalité précédente par I_{n-1}, il vient : $\forall n \geqslant 2 \quad nI_nI_{n-1}=(n-1)I_{n-1}I_{n-2}$.

$$\boxed{\text{La suite } (nI_nI_{n-1})_{n\geqslant 1} \text{ est donc constante de valeur } I_1I_0=\frac{\pi}{2}.}$$

B-2 (a) $\forall t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad \cos(t)\in[0,1]$, donc $\forall n \in \mathbf{N} \quad \cos^{n+1}(t)\leqslant\cos^n(t)$ et par croissance de l'intégrale, on a : $\forall n \in \mathbf{N} \quad I_{n+1}\leqslant I_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est décroissante.}}$$

(b) On sait que

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad I_{n+1}\leqslant I_n\leqslant I_{n-1} \quad \text{et} \quad nI_n>0$$

alors

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad nI_nI_{n+1}\leqslant nI_n^2\leqslant nI_nI_{n-1}$$

La suite $(nI_nI_{n-1})_{n\geqslant\mathbf{N}^*}$ est constante de valeur $\frac{\pi}{2}$ alors

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad n\frac{\pi}{2(n+1)}\leqslant nI_n^2\leqslant\frac{\pi}{2}$$

ou encore $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad 0<\frac{\pi}{2(n+1)}\leqslant I_n^2\leqslant\frac{\pi}{2n}$. La fonction racine carrée étant croissante sur $[0,+\infty[$ avec $I_n>0$, on obtient : $\boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}}\leqslant I_n\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \text{ valable pour } n\geqslant 1.}$

B-3 (a) Pour $n\in\mathbf{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $I_{2n}=\frac{\pi}{2}.\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

• *Initialisation :* On sait que $I_0=\frac{\pi}{2}$ et $\binom{0}{0}=1=2^0$, alors la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• *Hérédité :* Soit $n\in\mathbf{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.
Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie :
On a vu $\forall n\geqslant 2 \quad I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$, alors

$$\begin{aligned}
I_{2(n+1)} &= I_{2n+2}\\
&= \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n}\\
&\qquad \text{et par hypothèse de récurrence } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie donc :}\\
&= \frac{\pi}{2}.\frac{2n+1}{2n+2}.\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\\
&= \frac{\pi}{2}.\frac{2n+1}{2(n+1)}.\frac{(2n)!}{n!.n!2^{2n}}\\
&= \frac{\pi}{2}.\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n+1)!n!}\\
&= \frac{\pi}{2}.\frac{(2n+2).(2n+1)!}{2(n+1).2^{2n+1}(n+1)!n!}\\
&= \frac{\pi}{2}.\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}.\frac{1}{2^{2(n+1)}}\\
I_{2(n+1)} &= \frac{\pi}{2}.\frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{2^{2(n+1)}} \text{ ce qui termine la récurrence}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc montré par récurrence que : } \forall n \in \mathbf{N} \quad I_{2n} = \frac{\pi}{2}.\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.}$$

(b) Dans la suite on pose $\lambda_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a vu $\sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{2n}$, alors en particulier $\sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n+1)}} \leqslant I_{2n} \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$, ce qui donne $\sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n+1)}} \leqslant \dfrac{\pi}{2}\lambda_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$. En multipliant par $\sqrt{n\pi}$ puis en divisant par $\dfrac{\pi}{2}$, il vient :

$$\sqrt{\frac{2n}{2n+1}} \leqslant \lambda_n\sqrt{n\pi} \leqslant 1$$

ou encore :

$$0 \leqslant 1 - \lambda_n\sqrt{n\pi} \leqslant 1 - \sqrt{\frac{2n}{2n+1}}$$

On remarque que : $1 - \sqrt{\dfrac{2n}{2n+1}} = \dfrac{1 - \dfrac{2n}{2n+1}}{1 + \sqrt{\dfrac{2n}{2n+1}}} = \dfrac{1}{2n+1+\sqrt{2n(2n+1)}}$.

$2n+1+\sqrt{2n(2n+1)} = 1+(2n)+\sqrt{4n^2+2n} \geqslant 2n+\sqrt{4n^2}$, donc
$2n+1+\sqrt{2n(2n+1)} \geqslant 4n > 0$ et $1-\sqrt{\dfrac{2n}{2n+1}} = \dfrac{1}{2n+1+\sqrt{2n(2n+1)}} \leqslant \dfrac{1}{4n}$

$$\boxed{\text{Finalement pour tout entier } n \geqslant 1, \text{ on obtient bien } 0 \leqslant 1-\lambda_n\sqrt{n\pi} \leqslant \frac{1}{4n}.}$$

(c) Par théorème d'encadrement l'inégalité précédente donne $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\lambda_n\sqrt{n\pi}) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n\sqrt{n\pi} = 1$ et donc $\boxed{\lambda_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}} \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.}$

C- Une suite de polynômes approchant uniformément la fonction valeur absolue sur $[-1,1]$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $P_n = \lambda_n \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{1}{2k-1}X^{2k}$.

C-1 (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, par quotient de fonctions polynômiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,1]$, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1-(1-t^2)^n}{t^2}$ est continue sur $]0,1]$.

On sait que $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2 \quad a^n - b_n = (a-b).\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}a^k b^{n-1-k}$, alors

$$f(t) = \frac{1-(1-t^2)}{t^2}\sum_{k=0}^{n-1}(1-t^2)^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}(1-t^2)^{n-1-k}$$

Par opérations sur les limites, on obtient $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.

La fonction f est prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0) = n$.

On s'autorise alors à noter $\displaystyle\int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}dt$ *pour tout* $x \in]0,1]$.

(b) D'après la formule du binôme de Newton, pour $(n,t) \in \mathbf{N}^* \times]0,1]$
$(1-t^2)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-t^2)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}t^{2k}$ alors

$$f(t) = \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2} = -\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}t^{2k-2}$$

Pour $x \in]0,1]$, en intégrant sur le segment $[0,x]$, la fonction f étant continue sur $[0,1]$ par prolongement, on obtient par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\int_0^x t^{2k-2}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}$$

En multipliant par x et par λ_n on obtient :

$$\lambda_n x \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \lambda_n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{2k-1} x^{2k} = P(x)$$

$$\boxed{\text{On a bien } \forall (n,x) \in \mathbf{N}^* \times]0,1] \quad P(x) = \lambda_n x \int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2} \mathrm{d}t.}$$

(c) Pour tout $(n,x) \in \mathbf{N}^* \times]0,1]$, on effectue le changement de variable linéaire $t = \varphi(u) = \dfrac{ux}{\sqrt{n}}$ dans l'intégrale précédente, ce qui donne puisque $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\sqrt{n}) = x$:

$$P_n(x) = \lambda_n x \int_0^{\sqrt{n}} \varphi'(u) \left(\frac{1-(1-\varphi^2(u))^n}{\varphi^2(u)} \right) \mathrm{d}u$$

or $\varphi'(u) = \dfrac{x}{\sqrt{n}}$, donc

$$P(x) = \lambda_n x \int_0^{\sqrt{n}} \frac{x}{\sqrt{n}} \left(\frac{1 - \left(1 - \frac{u^2x^2}{n})\right)^n}{\frac{u^2x^2}{n}} \right) \mathrm{d}u$$

Et finalement $P(x) = \lambda_n \sqrt{n} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(\frac{1 - \left(1 - \frac{u^2x^2}{n})\right)^n}{u^2} \right) \mathrm{d}u.$

C-2 Soit x un réel non nul. La fonction $u \mapsto \dfrac{1-e^{u^2x^2}}{u^2}$ est continue sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$. Par le changement de variable linéaire $u = \dfrac{t}{|x|} = \varphi(t)$ puisque $\varphi(a|x|) = a$ et $\varphi(b|x|) = b$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\mathrm{d}u &= \int_{a|x|}^{b|x|} \varphi'(t) \frac{1-e^{-\varphi^2(t)x^2}}{\varphi^2(t)} \mathrm{d}t \\
& \text{or } \varphi'(t) = \frac{1}{|x|} \text{ et } \varphi^2(t) = \frac{t^2}{|x|^2} = \frac{t^2}{x^2} \text{ donc} \\
&= \int_{a|x|}^{b|x|} \frac{1}{|x|} |x|^2 \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} \mathrm{d}t \\
\int_a^b \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\mathrm{d}u &= |x| \int_{a|x|}^{b|x|} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Puisque $|x| > 0$ on a $\lim\limits_{a\to 0} a|x| = 0$ et $\lim\limits_{b\to+\infty} b|x| = +\infty$, et avec le résultat de la question A-2 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\mathrm{d}u = \lim_{b\to+\infty} \left(\lim_{a\to 0} |x| \int_{a|x|}^{b|x|} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\mathrm{d}t \right) = |x| \lim_{d\to+\infty} \left(\lim_{c\to 0} \int_c^d \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\mathrm{d}t \right) = |x|\sqrt{\pi}$$

$$\boxed{\text{Finalement } \forall x \neq 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\mathrm{d}u = \lim_{b\to+\infty} \left(\lim_{a\to 0} \int_a^b \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\mathrm{d}u \right) = |x|\sqrt{\pi}.}$$

C-3 Soient un entier $n \geqslant 1$ et $x \in]0,1]$; on pose

$$\Delta_n(x) = \int_0^{\sqrt{n}} \left(\frac{1 - \left(1 - \frac{u^2x^2}{n}\right)^n}{u^2} \right) \mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \Delta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u^2x^2}}{u^2} \mathrm{d}u$$

(a) On a vu en C-1(c) :

$$P_n(x) = \lambda_n \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} \left(\frac{1 - \left(1 - \frac{u^2x^2}{n})\right)^n}{u^2} \right) \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\lambda_n \sqrt{n\pi} \Delta_n(x) \right)$$

Et puisque $x > 0$, on a aussi par C-2 : $\Delta(x) = x\sqrt{\pi}$, donc

$$P_n(x) - x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\lambda_n \sqrt{n\pi} \Delta_n(x) - \Delta(x) \right)$$

On peut écrire :

$$P_n(x) - x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\lambda_n \sqrt{n\pi} \left(\Delta_n(x) - \Delta(x) \right) - (1 - \lambda_n \sqrt{n\pi}) \Delta(x) \right)$$

et par inégalité triangulaire puisque $\lambda_n > 0$:

$$|P_n(x) - x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\lambda_n \sqrt{n\pi} |\Delta_n(x) - \Delta(x)| + |1 - \lambda_n \sqrt{n\pi}|.|\Delta(x)| \right) (*)$$

On rappelle que $\Delta(x) = |x|\sqrt{\pi}$, alors $\forall x \in]0,1] \quad \Delta(x) \geqslant 0$.

On a vu en B-3 que $0 \leqslant 1 - \lambda_n \sqrt{n\pi} \leqslant \dfrac{1}{4n}$ alors $0 \leqslant \lambda_n \sqrt{n\pi} \leqslant 1 \leqslant 1 + \dfrac{1}{4n}$ et donc $(*)$ entraine

$$\boxed{|P_n(x) - x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\left(\frac{1}{4n} + 1 \right) |\Delta_n(x) - \Delta(x)| + \frac{1}{4n} \Delta(x) \right)}$$

(b) Par relation de Chasles on peut écrire

$$\Delta_n(x) - \Delta(x) = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-u^2x^2} - \left(1 - \frac{u^2x^2}{n}\right)^n}{u^2} \mathrm{d}u - \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{1 - e^{-u^2x^2}}{u^2} \mathrm{d}u$$

Par limite d'un terme positif, $\displaystyle\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{1 - e^{-u^2x^2}}{u^2} \mathrm{d}u = \lim_{b \to +\infty} \int_{\sqrt{n}}^{b} \frac{1 - e^{-u^2x^2}}{u^2} \mathrm{d}u \geqslant 0$, donc par inégalité triangulaire :

$$(1) \quad quad\, |\Delta_n(x) - \Delta(x)| \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\left| e^{-u^2x^2} - \left(1 - \frac{u^2x^2}{n}\right)^n \right|}{u^2} \mathrm{d}u + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{1 - e^{-u^2x^2}}{u^2} \mathrm{d}u$$

On a vu en A-3(b) et A-4(d) : $\forall n \geqslant 1 \quad \forall t \in [0,n] \quad 0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \dfrac{t^2e^{-t}}{n}$.
Pour $u \in [0, \sqrt{n}]$ et $x \in]0,1]$, $0 \leqslant u^2x^2 \leqslant nx^2 \leqslant n$ donc
$0 \leqslant e^{-u^2x^2} - \left(1 - \frac{u^2x^2}{n}\right)^n \leqslant \dfrac{u^4x^4e^{-u^2x^2}}{n}$ et alors

$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{\left| e^{-u^2x^2} - \left(1 - \frac{u^2x^2}{n}\right)^n \right|}{u^2} \mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{n} \int_0^{\sqrt{n}} u^2x^4e^{-u^2x^2} \mathrm{d}u$$

En effectuant le changement de variable linéaire $t = ux$ on obtient :

$$\int_0^{\sqrt{n}} u^2 x^4 e^{-u^2x^2}\mathrm{d}u = x\int_0^{x\sqrt{n}} t^2 e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

Or $0 < x \leqslant 1$ et $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{x\sqrt{n}} t^2 e^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\mathrm{d}t$ donc par produit et par A-1

$$\int_0^{\sqrt{n}} u^2 x^4 e^{-u^2x^2}\mathrm{d}u \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Ce qui donne :

$$(2) \quad \int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-u^2x^2} - \left(1 - \frac{u^2x^2}{n}\right)^n}{u^2}\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{n}} u^2x^4e^{-u^2x^2}\mathrm{d}u \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{4n}$$

On remarque aussi que $\forall u \geqslant \sqrt{n} \quad 1 - e^{-u^2} \leqslant 1$ donc $\frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2} \leqslant \dfrac{1}{u^2}$.

Pour $b > \sqrt{n} \quad \displaystyle\int_{\sqrt{n}}^b \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\mathrm{d}u \leqslant \int_{\sqrt{n}}^b \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$ or $\displaystyle\int_{\sqrt{n}}^b \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u = \left[\frac{-1}{u}\right]_{\sqrt{n}}^b = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{b}$.

On en déduit que $\forall b > \sqrt{n} \quad \displaystyle\int_{\sqrt{n}}^b \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ et par passage à la limite quand $b \to +\infty$, on trouve

$$(3) \quad \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Finalement avec (1), (2) et (3) on obtient

$$\boxed{|\Delta_n(x) - \Delta(x)| \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(\frac{e^{-u^2x^2} - \left(1 - \frac{u^2x^2}{n}\right)^n}{u^2}\right)\mathrm{d}u + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty}\left(\frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\right)\mathrm{d}u \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

(c) Par C-3(a) et C-3(b), on a pour tout $x \in]0,1]$:

$$|P_n(x) - x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\left(1 + \frac{1}{4n}\right)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{4n}\Delta(x)\right)$$

D'après C-2 on sait que $\forall x \in]0,1] \quad \Delta(x) = x\sqrt{\pi}$, donc $\Delta(x) \leqslant \sqrt{\pi}$ et donc

$$|P_n(x) - x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\left(1 + \frac{1}{4n}\right)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{4n}\right)$$

$$\forall x \in]0,1] \quad |P_n(x) - x| \leqslant \left(1 + \frac{1}{4n}\right)\left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right) + \frac{1}{4n}$$

De plus $P_n(0) = 0$ donc

$$\forall x \in [0,1] \quad |P_n(x) - x| \leqslant \left(1 + \frac{1}{4n}\right)\left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right) + \frac{1}{4n}$$

On en déduit que

$$\underset{x\in[0,1]}{Sup}|P_n(x) - x| \leqslant \left(1 + \frac{1}{4n}\right)\left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right) + \frac{1}{4n}$$

On remarque que la fonction polynômiale $x \mapsto P_n(x)$ est paire (tous les monômes de P_n sont de degré pair), alors la fonction $t \mapsto |P_n(t) - |t||$ est paire et donc

$$\underset{-1\leqslant t\leqslant 1}{Sup}|P_n(t) - |t|| = \underset{t\in[0,1]}{Sup}|P_n(t) - |t|| = \underset{t\in[0,1]}{Sup}|P_n(t) - t|$$

Finalement :

$$\underset{-1\leqslant t\leqslant 1}{Sup}|P_n(t) - |t|| \leqslant \left(1 + \frac{1}{4n}\right)\left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right) + \frac{1}{4n}$$

(d) Par théorème d'encadrement sur

$$(**) 0 \leqslant \underset{-1\leqslant t\leqslant 1}{Sup}|P_n(t) - |t|| \leqslant \left(1 + \frac{1}{4n}\right)\left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right) + \frac{1}{4n}$$

on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \underset{-1\leqslant t\leqslant 1}{Sup}|P_n(t) - |t|| = 0$, ce qui signifie que

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (P_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ converge uniformément sur le segment } [-1,1] \text{ vers } h : t \mapsto |t|.}$$

De plus l'inégalité $(**)$, avec $\|P_n - h\|_\infty = \underset{-1\leqslant t\leqslant 1}{Sup}|P_n(t) - |t||$, s'écrit :

$$0 \leqslant \|P_n - h\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}A_n \text{ avec } A_n = \left(1 + \frac{1}{4n}\right)\left(\frac{1}{4\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) + \frac{1}{4\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

La suite (A_n) est convergente donc est bornée et finalement $\boxed{\|P_n - h\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).}$

Exercice : Extrait de EMLyon - MP-PC-PSI - 2022

Soit d un entier, $d \geqslant 2$. Soit $\omega = (\omega_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de complexes, périodique de pédiode d, c'est-à-dire telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \omega_{n+d} = \omega_n$$

Dans cet exercice, on s'intéresse à la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum u_n(\lambda)$ de terme général

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n(\lambda) = \frac{\omega_n + \lambda}{n}$$

où λ est un complexe. On note plus simplement $u_n = u_n(0)$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Supposons, dans cette question uniquement, qu'il existe un complexe λ tel que $\sum u_n(\lambda)$ converge.

   Soit μ un complexe tel que $\mu \neq \lambda$. On peut écrire :

   $$u_n(\mu) = u_n(\lambda) + \frac{\mu - \lambda}{n} \text{ ou encore } \frac{1}{n} = \frac{u_n(\mu)}{\mu - \lambda} - \frac{u_n(\lambda)}{\mu - \lambda}$$

   Si la série $\sum u_n(\mu)$ converge alors par combinaison linéaire la série $\sum \frac{1}{n}$ converge, ce qui est absudre puisque l'on sait que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

On en conclut que $\boxed{\text{la série } \sum u_n(\mu) \text{ diverge pour } \mu \neq \lambda \ .}$

2. Dans cette question, on choisit $\lambda = 0$.
Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n la somme partielle associée à la série $\sum u_n$, c'est-à-dire $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{k}$.
   (a) Soit $k \in \mathbf{N}$.
   - $\omega_{0d+k} = \omega_k$.
   - Soit $m \in \mathbf{N}$ tel que $\omega_{md+k} = \omega_k$.

   Par périodicité de la suite ω, on a : $\omega_{(m+1)d+k} = \omega_{d+(md+k)} = \omega_{md+k} = \omega_k$.
   On a donc montré par récurrence que $\forall m \in \mathbf{N} \quad \omega_{md+k} = \omega_k$. On a donc :
$$\frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} = \frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_k = \frac{\Omega}{md+1}$$
   où $\Omega = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \omega_k$.

   (b) Par définition :
$$\begin{aligned}
S_{(m+1)d} - S_{md} &= \sum_{k=md+1}^{md+d} \frac{\omega_k}{k} \\
&\qquad \text{par le changement d'indice } i = k - md \\
&= \sum_{i=1}^{d} \frac{\omega_{md+i}}{md+i} \\
&= \frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} + \left(\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k}\left(\frac{1}{md+k} - \frac{1}{md+1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} + \frac{1}{md}\left(\sum_{k=1}^{d} \omega_k\left(\frac{1}{1+\frac{k}{md}} - \frac{1}{1+\frac{1}{md}}\right)\right)
\end{aligned}$$
   Quand $m \to +\infty$, pour $k \in [\![1, d]\!]$ $\quad \dfrac{1}{1+\frac{k}{md}} = 1 - \dfrac{k}{md} + o\left(\dfrac{1}{m}\right)$, alors,
$$S_{(m+1)d} - S_{md} = \frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} + \frac{1}{md}\left(\sum_{k=1}^{d}\left(\frac{\omega_k(1-k}{md}\right) + o\left(\frac{1}{m}\right)\right)$$
   En posant $\alpha = \dfrac{1}{d^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{d} \omega_k(1-k)$ on obtient
$$S_{(m+1)d} - S_{md} = \frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} + \frac{\alpha}{m^2} + \underset{m\to\infty}{o}\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

(c) L'égalité précédente s'écrit :

$$S_{(m+1)d} - S_{md} = \frac{\Omega}{md+1} + \frac{\alpha}{m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

On sait que la série de Riemann $\sum \frac{1}{m^2}$ converge et $\frac{1}{md+1} \sim \frac{1}{d}.\frac{1}{m}$ avec $\sum \frac{1}{m}$ qui diverge.

• Si $\Omega \neq 0$ alors $S_{(m+1)d} - S_{md} \sim \frac{\Omega}{d}.\frac{1}{m}$ et la série $\sum \left(S_{(m+1)d} - S_{md}\right)$ diverge par comparaison (les séries étant à termes de signe constant).

• Si $\Omega = 0$ alors $S_{(m+1)d} - S_{md} = O\left(\frac{1}{m^2}\right)$ et la série $\sum \left(S_{(m+1)d} - S_{md}\right)$ converge.

On en déduit que la série $\sum \left(S_{(m+1)d} - S_{md}\right)$ converge **SSI** $\Omega = 0$.

(d) • Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et donc la suite extraite $(S_{md})_{m in \mathbf{N}^*}$ est convergente. On en déduit que la série télescopique $\sum (S_{(m+1)d} - S_{md})$ converge et donc $\Omega = 0$.

• Si $\Omega = 0$ alors la série télescopique $\sum (S_{(m+1)d} - S_{md})$ converge et donc la suite $(S_{md})_{m in \mathbf{N}^*}$ est convergente. Notons $\ell = \lim_{m\to+\infty} S_{md}$.
Par division euclidienne, on sait que $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \exists!(m,k) \in \mathbf{N}^* \times [\![1, d-1]\!], \quad n = md+k$ et $n \to +\infty \iff m \to +\infty$, alors

$$\begin{aligned}
S_n &= S_{md+k} \\
&= \sum_{i=1}^{md+k} \frac{\omega_i}{i} \\
&= S_{md} + \sum_{i=md+1}^{md+k} \frac{\omega_i}{i} \\
&= S_{md} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\omega_{md+j}}{md+j} \\
S_n &= S_{md} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\omega_j}{md+j}
\end{aligned}$$

$\forall j \in [\![1, k]\!] \quad \lim_{m\to+\infty} \frac{\omega_j}{md+j} = 0$ donc

$$\ell = \lim_{m\to+\infty} S_{md} = \lim_{m\to+\infty} \left(S_{md} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\omega_j}{md+j}\right) = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente donc la série $\sum u_n$ converge.

$$\boxed{\text{On a montré par double implication que la série } \sum u_n \text{ converge } \textbf{SSI } \Omega = \sum_{k=1}^{d} \omega_k = 0.}$$

(e) Par définition $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad u_n(\lambda) = \dfrac{\omega_n + \lambda}{n}$ avec $(\omega_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ qui est périodique de période d. On peut alors écrire $u_n(\lambda) = v_n(0) = \dfrac{\alpha_n}{n}$ où $\alpha_n = \omega_n + \lambda$.
La suite (α_n) est périodique de période d et on peut appliquer les résultats des questions 2(a),(b),(c) à la série $\sum v_n$, ce qui donne : $\sum v_n$ converge **SSI** $\displaystyle\sum_{k=1}^{d} \alpha_k = 0$.

On en déduit que la série $\sum u_n(\lambda)$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{k=1}^{d}(\omega_k + \lambda) = 0$, ce qui revient à $\Omega + d\lambda = 0$.

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n(\lambda) \text{ converge si, et seulement si, } \lambda = -\frac{\Omega}{d}.}$$

3. **Une généralisation** Dans cette question, on se donne une suite croissante $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels, telle que $a_1 > 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. On suppose que $\Omega = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \omega_k = 0$. On pose, pour tout n$\geqslant 1$,

$$u_n = \frac{\omega_n}{a_n} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k$$

Par soucis de commodité, on note également $T_0 = 0$.

(a) On remarque que $T_d = \Omega = 0$.

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad T_{d+n} = \sum_{k=1}^{d+n} \omega_k = T_d + \sum_{k=d+1}^{d+n} \omega_k = \sum_{i=1}^{n} \omega_{d+i} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i = T_n.$$

On en déduit que la suite (T_n) est périodique, $\boxed{\text{et donc } (T_n) \text{ est bornée :}}$

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad |T_n| \leqslant Max\,\{|T_k|, k \in [\![1, d]\!]\}$$

(b) Soit n un entier naturel non nul, par définition $\forall k \in \mathbf{N} \quad \omega_k = T_k - T_{k-1}$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k - T_{k-1}}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k}{a_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{T_{k-1}}{a_k}$$

on pose $i = k - 1$ dans la dernière somme

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k}{a_k} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T_i}{a_{i+1}}$$

et puisque $T_0 = 0$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k}{a_k} - \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i}{a_{i+1}} + \frac{T_n}{a_{n+1}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} T_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) + \frac{T_n}{a_{n+1}}$$

(c) On sait que la suite (T_k) est bornée : $\exists M > 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}^* \quad |T_k| \leqslant M$, et la suite (a_n) est croissante strcitement positive ($a_1 > 0$), alors $\forall k \in \mathbf{N}^* \quad \dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}} \geqslant 0$, on a donc

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \quad 0 \leqslant \left| T_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \right| = |T_k| \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \leqslant M \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

Par hypothèse $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = +\infty$, alors $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{1}{a_k} = 0$.

Puisque la suite $\left(\dfrac{1}{a_k}\right)_{k \in \mathbf{N}^*}$ converge, on sait que la série télescopique $\sum \left(\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$ converge et par comparaison la série $\sum \left| T_k \left(\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}}\right) \right|$ converge, ce qui donne la convergence absolue de la série $\sum T_k \left(\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum T_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \text{ converge.}}$$

(d) La série $\sum T_k \left(\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$ converge, donc la somme partielle $\sum\limits_{k=1}^{n} T_k \left(\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$ admet une limite finie lorsque n tend vers l'infini.

De plus par produit d'une suite bornée et d'une suite qui converge vers 0, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{T_n}{a_{n+1}} = 0$.

Par opération sur les limites avec l'égalité $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{n} T_k \left(\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}}\right) + \dfrac{T_n}{a_{n+1}}$, on obtient que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ admet une limite finie, or c'est la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, donc $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge.}}$