PSI - Devoir à rendre le lundi 30 septembre 2024

Exercice 1 : Étude d'une somme de série de fonctions

Pour tout réel x on pose :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sin(nx)}{3^n}.$$

1. Démontrer que φ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout x réel, justifier l'écriture : $\varphi(x) = \dfrac{1}{2} + \operatorname{Im}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right)$.

   En déduire une expression simple de $\varphi(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, en déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n}$ en fonction de $\cos(x)$.

4. À l'aide de $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(x)dx$ démontrer que :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}+1}{n3^{n+1}}.$$

   Puis en calculant la somme de la série du second membre, en déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}dx$.

5. Retrouver la valeur de cette intégrale par un calcul direct.

Exercice 2 : Résolution d'une équation fonctionnelle

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x+1)+f(x) = \frac{1}{x^2}. \qquad (P)$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

6. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \varphi_k$.

7. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $\varphi(x+1)+\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

8. Justifier que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

9. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

10. Montrer que si $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

11. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Etude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

12. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge normalement sur $[\varepsilon, +\infty[$.

13. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$.

    En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.

14. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

15. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
    ú

16. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

    En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Fin de l'énoncé