On admet le résultat suivant : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$**.**

Le but de ce problème est alors la valeur de chacune des intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

Partie I : Existence d'intégrales

1. Montrer que les fonctions $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ sont intégrables sur $]0,1]$.

2. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ sont convergentes.

3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-it^2}\mathrm{d}t$ converge.

Partie II : Une fonction définie comme intégrale à paramètre

Soit $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(i+t^2)x^2}}{i+t^2}\mathrm{d}t$.

4. Montrer que h est définie et continue sur $\mathbf{R}$.

5. Déterminer la limite de h en $+\infty$.

6. Montrer que h est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

7. Montrer que $\forall x > 0 \quad h'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2}$.

8. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+i}\mathrm{d}t$.

Partie III : Calculs d'intégrales

9. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4+1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t$.

10. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x = \frac{1-i}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1}\mathrm{d}t$.

11. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall t \in [0,+\infty[\quad \dfrac{t^2+1}{t^4+1} = \dfrac{a}{t^2+t\sqrt{2}+1} + \dfrac{b}{t^2-t\sqrt{2}+1}$.

12. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x$, puis les valeurs des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.