*Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

## Exercice 1 : Une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-t^n)\mathrm{d}t$.

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, l'existence de $I_n$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall t \in [1, +\infty[ \quad t^n \geqslant 1 + n(t-1)$.

3. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

4. En le justifiant, effectuer le changement de variable $u = t^n$ dans $I_n$.

5. Rappeler l'énoncé du théorème de convergence dominée. Déterminer alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$.
   *Le résultat sera donné en fonction d'une intégrale $J$ que l'on ne cherchera pas à calculer.*

6. En déduire un équivalent de $I_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini en fonction de $J$.

7. Déterminer la nature des séries numériques $\sum I_n$ et $\sum(-1)^n I_n$.

8. On pose, pour tout réel $x$ et lorsque cela est possible $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$.

   Donner l'ensemble de définition de $f$.

## Problème : Suite et série de fonctions

Soit $p \in \mathbf{N}$ et $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant p$,

$$P_n = \prod_{k=p}^{n} u_k.$$

On dit que la suite $(P_n)_{n\geqslant p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant p} u_n$.

Si la suite $(P_n)_{n\geqslant p}$ converge, on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} P_n.$$

## Partie 1 : Deux exemples

9. Calculer $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

10. Pour tout $N \geqslant 2$, établir une expression de $\displaystyle\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

    En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

## Partie 2 : Résultats préliminaires

11. Montrer que, pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$\left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)-1\right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right)-1.$$

12. Montrer que, pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in[-1,+\infty[^n$,

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right).$$

## Partie 3 : Etude d'une fonction définie par un produit infini

On considère dans cette partie :

- $a$ et $b$ deux réels tels que $a<b$ et le segment $\mathcal{S}=[a,b]$.
- $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies et continues sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $]-1,+\infty[$.
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}|f_n|$ est une série de fonctions qui converge uniformément sur $\mathcal{S}$.
- Pour tout $n\in\mathbf{N}^\star$ et $x\in\mathcal{S}$ :

$$P_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(1+f_k(x)),\quad Q_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(1+|f_k(x)|),\quad R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}|f_k(x)|.$$

13. Montrer qu'il existe $M\in\mathbb{R}_+^\star$ tel que, pour tout $x\in\mathcal{S}$ et $n\in\mathbb{N}^\star$,

$$Q_{n+1}(x)-Q_n(x)\leqslant \mathrm{e}^M|f_{n+1}(x)|.$$

14. Montrer que, pour tout $x\in\mathcal{S}$ et $n\in\mathbb{N}^\star$,

$$|P_{n+1}(x)-P_n(x)|\leqslant Q_{n+1}(x)-Q_n(x).$$

15. En déduire que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction $P$ définie sur $\mathcal{S}$ par :

$$P:\left\{\begin{array}{l}\mathcal{S}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(1+f_n(x))\end{array}\right.$$

16. Montrer que la fonction $P$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.

17. On suppose de plus que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ telle que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{f_n'}{1+f_n}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

    Montrer que la fonction $P$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ et que

$$\forall x \in \mathcal{S},\ \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}$$

18. ***Étude d'une fonction particulière***

    Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose $f(x) = \prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - e^{-nx^2}\right)$.

    (a) Montrer que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

    (b) Dresser le tableau des variations de $f$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ puis calculer les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.

# Exercice 2 : Valeur d'une intégrale

Dans tout l'exercice $\alpha$ désigne un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.
On note $f$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in ]0, +\infty[ \quad f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$$

On rappelle que la notation $\sin^2(x)$ désigne $(\sin(x))^2$.

19. Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$.

    **On admet désormais le résultat suivant :** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \dfrac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$**.**

20. Montrer que $f$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

21. Calculer la dérivée de $f$ sur $]0, +\infty[$.

22. Montrer, pour tout $x \in ]0, +\infty[$, les deux inégalités suivantes :

$$\left|x\sqrt{x}f'(x)\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x\sqrt{x}}$$

    et

$$\left|x\sqrt{x}f'(x)\right| \leqslant 4\sqrt{x}$$

    *Pour montrer la deuxième inégalité, on rappelle que* $\forall x > 0 \quad |\sin(x)| \leqslant x$.

23. En séparant les cas $x \geqslant 1$ et $0 < x < 1$, en déduire que :

$$\forall x \in ]0, +\infty[ \quad |f'(x)| \leqslant \frac{4}{x\sqrt{x}}$$

24. Justifier que, pour tout entier $N$ strictement positif

$$\int_{\alpha}^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\alpha} \frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2}\mathrm{d}t,$$

puis que :

$$\int_{\alpha}^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} = \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\alpha} \left( \frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right) \mathrm{d}t$$

25. A l'aide de la question 23 et de l'inégalité des acroissements finis appliquée à la fonction $f$, démontrer que pour tout $n$ entier strictement positif et tout réel $t$ de l'intervalle $[0, \alpha]$, on a :

$$\left| \frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right| \leqslant \frac{4t}{(n\alpha)^{3/2}}$$

26. Montrer ensuite que pour tout entier $N$ strictement positif, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \int_0^{\alpha} \left| \frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right| \mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

27. En déduire avec soin que :

$$\left| \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \frac{\pi-\alpha}{2} \right| \leqslant 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

puis déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

**Fin de l'énoncé**