1 Suites de fonctions, série de fonctions et intégration sur un intervalle

1.1 Théorème de convergence dominée (admis)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I.

Si

- $\forall n \in \mathbf{N} \quad f_n$ est continue par morceaux sur I
- $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I
- il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

alors

les fonctions f_n et f sont intégrables sur I
et
$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \int_I f(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 1.1

- Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^n}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1} \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.
- Déterminer un équivalent $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}\cos(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

1.2 Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle (admis)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions toutes définies sur I et à valeurs dans $\mathbf{K}$, avec I un intervalle quelconque de $\mathbf{R}$.

Si

- $\forall n \in \mathbf{N} \quad f_n \in L^1(I, \mathbf{K})$ (f_n *est intégrable sur* I),
- la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I,
- la fonction somme $\displaystyle S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I,
- la série numérique $\displaystyle\sum \int_I |f_n|$ converge

Alors

la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I, la série numérique $\sum \int_I f_n$ converge

et

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 1.2

• Vérifier les égalités : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\mathrm{d}t.$

• **Attention**, le théorème précédent peut ne pas s'appliquer et dans ce cas on peut se ramener au théorème de convergence dominée sur la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Montrer que : $\forall \alpha > 0 \quad \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}.$

2 Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Dans tout ce paragraphe on considère deux intervalles A et I de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Soit une fonction $f : \begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbf{K} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array}$

Lorsque pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I, on peut définir la fonction $x \in A \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t.$

On se pose alors la question de la régularité de cette fonction.

Exemple 2.1

$f : (x,t) \mapsto \dfrac{x}{1+x^2t^2}$ est continue sur $\mathbf{R}^2$. Considérons la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t.$
g est définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \\ \\ g(0) = 0 \\ \\ g(x) = -\dfrac{\pi}{2} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

donc g n'est pas continue en 0 et on remarque aussi que

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t \neq \int_0^{+\infty} \lim_{x\to 0^+} f(x,t)\mathrm{d}t$$

2.1 Théorème de continuité sous le signe $\int$

Soit $f : \begin{array}{l} A \times I \to \mathbf{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array}$.

Si

- pour tout t de I, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
- pour tout x de A, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I
- ***Hypothèse de domination :*** il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que : $\forall (x,t) \in A \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$

Alors

- pour tout x de A, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I et
- la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Exemple 2.2

Montrer que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(xt)}{\sqrt{t(1+t)}}\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbf{R}$.

Il est parfois difficile de trouver une fonction φ qui domine f sur tout l'intervalle A. On peut alors se restreindre à une version localisée du théorème précédent (la continuité étant une notion locale).

Remarque 2.1 **Hypothèse de domination sur tout segment inclus dans A**

Soit $f : \begin{array}{l} A \times I \to \mathbf{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array}$.

Si

- pour tout t de I, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
- pour tout x de A, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I
- ***Hypothèse de domination sur tout segment :***
pour tout segment $[a,b] \subset A$, il existe une fonction $\varphi_{a,b}$ intégrable sur I, telle que : $\forall (x,t) \in [a,b] \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$

Alors

- pour tout x de A, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I et
- la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur tout segment inclus dans A, donc est continue sur A.

On peut aussi remplacer tout segment inclus dans A par d'autres intervalles adaptés à la situation, par exemple $[a,+\infty[$ avec $a > 0$ pour une continuité sur $]0,+\infty[$.

Exemple 2.3

Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{x+t} \mathrm{d}t$ est continue sur $]0, +\infty[$.

2.2 Théorème de convergence dominée à paramètre continu

Soit $f : \begin{array}{l} A \times I \to \mathbf{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array}$ et soit a une borne de A.

Si

- pour tout t de I, $\lim\limits_{x \to a} f(x,t) = \ell(t) \in \mathbf{K}$;
- pour tout x de A, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I
- ***Hypothèse de domination :*** il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que : $\forall (x,t) \in A \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$

Alors

- la fonction $\ell : t \mapsto \ell(t)$ est intégrable sur I et
- $\lim\limits_{x \to a} \displaystyle\int_I f(x,t) \mathrm{d}t = \int_I \ell(t) \mathrm{d}t$

Comme pour le théorème de continuité, on peut restreindre l'hypothèse de domination à un intervalle inclus dans A et dont une borne est a.

Exemple 2.4

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{x+t} \mathrm{d}t$.
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\mathrm{sh}(t)}{t} \mathrm{d}t$.

2.3 Théorème de dérivation sous le signe $\int$

Soit $f : \begin{array}{l} A \times I \to \mathbf{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array}$.

Si

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur A ;
- pour tout x de A, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

- ***Hypothèse de domination*** : il existe une fonction ψ intégrable sur I, telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times I \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$$

alors

> la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur A et vérifie :
>
> $$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t \qquad (\textit{Formule de Leibniz})$$

Exemple 2.5

Montrer que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t$ vérifie l'équation différentielle $y' = -\dfrac{x}{2}y$.
En déduire une expression simplifiée de $g(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$.
On admettra que $g(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Remarque 2.2 *Restriction de l'hypothèse de domination*

En conservant les notations de la propriété précédente, on peut changer l'hypothèse de domination sur A par une hypothèse de domination sur tout segment inclus dans A ou d'autres intervalles adaptés à la situation.
On conserve le même résultat final, puisque $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ va être de classe C^1 sur tout $[a,b] \subset A$, donc sur A.

Exemple 2.6

Montrer que la fonction $g : x \in]0,+\infty[\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
Trouver une expression simple de $g'(x)$. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et en déduire une expression sans intégrale de $g(x)$ pour $x > 0$.

2.4 Extension aux fonctions de classe C^k

Soit $f : \begin{array}{l} A \times I \to \mathbf{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array}$ et $k \geqslant 2$.

Si

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur A ;

- pour tout x de A et tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ_k intégrable sur I, telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times I \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_k(t) \qquad \textit{(hypothèse de domination)}$$

alors

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{la fonction } g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t \text{ est de classe } C^k \text{ sur } A \text{ et} \\[2ex] \forall j \in [\![1,k]\!] \quad \forall x \in A, \quad g^{(j)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\mathrm{d}t \qquad \textit{(Formule de Leibniz)}.\end{array}}$$

En pratique pour montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est de classe C^∞ sur A, on supprime le second point et on montre l'hypothèse de domination sur tout segment incluas dans A pour $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

Exemple 2.7 *La fonction Gamma d'Euler*

Soit $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$.

1. Déterminer D le domaine de définition de la fonction Γ.
2. Montrer que Γ est de classe C^∞ sur D.