Exercice 1 : Extrait de e3a 2021 PSI

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-t^n)\mathrm{d}t$.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction $t \mapsto e^{-t^n}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

   $\forall t \in [1, +\infty[\quad t^n \geqslant t$, alors $0 \leqslant \exp(-t^n) \leqslant \exp(-t)$. Or on sait que la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$ ($e^{-t} = e^{-\alpha t}$ avec $\alpha = 1 > 0$).

   Par comparaison on en déduit que $\boxed{t \mapsto e^{-t^n} \text{ est intégrable sur } [1, +\infty[\text{ et donc } I_n \text{ existe.}}$

2. 1ère méthode : la plus simple par inégalités directes

   $\forall t \in [1, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad t^n \geqslant 1$ et $nt \geqslant n$, alors par somme :

   $$t^n + nt \geqslant 1 + n$$

   ce qui donne immédiatement : $\forall t \in [1, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad t^n \geqslant 1 + n - nt.$

   $$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall t \in [1, +\infty[\quad t^n \geqslant 1 + n(t-1).}$$

   2nde méthode : la plus utilisée par étude d'une fonction
   Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $g_n : t \mapsto t^n - 1 - n(t-1)$.
   La fonction g_n est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ avec

   $$\forall t \geqslant 1 \quad g_n'(t) = nt^{n-1} - n = n(t^{n-1} - 1) \geqslant 0$$

   La fonction g_n est croissante sur $[1, +\infty[$, donc $\forall t \in [1, +\infty[\quad g_n(t) \geqslant g_n(1)$.
   Et puisque $g_n(1) = 0$, on a :

   $$\forall t \in [1, +\infty[\quad t^n - n(t-1) \geqslant 0$$

   ce qui donne $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall t \in [1, +\infty[\quad t^n \geqslant 1 + n(t-1).}$

   $3^{\text{ième}}$ méthode vue plusieurs fois : par inégalité de convexité

   • Pour $n = 1$ l'inégalité $t^n \geqslant n(t-1) + 1$ est en fait l'égalité $t = t$.

   • Pour $n \geqslant 2$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^+$ avec $g_n'(t) = nt^{n-1}$ et $g_n''(t) = n(n-1)t^{n-2} \geqslant 0$. La fonction g_n est donc convexe sur $\mathbf{R}^+$ et donc sa courbe est au-dessus de sa tangente en $t = 1$, donc $\forall t \in [1, +\infty[\quad g_n(t) \geqslant g_n'(1)(t-1) + g_n(1)$, ce qui donne $t^n \geqslant n(t-1) + 1$.

   $$\boxed{\text{Finalement } \forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall t \in [1, +\infty[\quad t^n \geqslant 1 + n(t-1).}$$

4ième méthode : par la formule du binôme de Newton

Par la formule du binôme de Newton, pour $n \geqslant 2$ et $t \in [1, +\infty[$:

$$t^n = (1 + (t-1))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (t-1)^k = 1 + n(t-1) + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (t-1)^k$$

Puisque $t \in [1, +\infty[$, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (t-1)^k \geqslant 0$, donc

$$\forall n \geqslant 2 \quad \forall t \in [1, +\infty[\quad t^n \geqslant 1 + n(t-1)$$

Pour $n = 1$, on a : $t^n = t$ et $1 + n(t-1) = t$ d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall t \in [1, +\infty[\quad t^n \geqslant 1 + n(t-1).}$$

On pouvait aussi faire une preuve par récurrence.

3. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. En reprenant l'inégalité précédente, par croissance de la fonction exponentielle, on a :
$$\exp(-t^n) \leqslant \exp(-1 - n(t-1))$$
On peut encore écrire cette inégalité sous la forme : $0 \leqslant \exp(-t^n) \leqslant e^{n-1}.\exp(-nt) \quad (*)$.

   Or pour $n \in \mathbf{N}^\star$, on sait que la fonction $t \mapsto \exp(-nt)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
   Par croissance de l'intégrale, puisqu'il y convergence des intégrales, on obtient à partir de l'inégalité $(*)$:
$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \exp(-t^n)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{n-1} \exp(-nt)\mathrm{d}t$$
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-nt)\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-nt}}{n}\right]_1^{+\infty} = \frac{e^{-n}}{n}$, donc
$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e^{-1}}{n}$$
Et par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \text{ converge vers } 0.}$$

4. $\begin{cases} u = t^n \\ t \in [1, +\infty[\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t = u^{1/n} = \varphi(u) \\ u \in [1, +\infty[\end{cases}$.
La fonction $\varphi : u \mapsto u^{1/n}$ est une bijection croissante de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ et est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, donc par changement de variable, puisque $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ converge, on sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi'(u) f_n(\varphi(u))\mathrm{d}u$ converge et : $\boxed{I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{n} u^{1/n-1} \exp(-u)\mathrm{d}u.}$

5. Énoncé du théorème de convergence dominée :
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I, qui converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et s'il existe une fonction φ intégrable sur I telle que :

$$\exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \forall t \in I \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

alors les fonctions f_n et f sont intégrable sur I pour $n \geqslant n_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I f(t)\mathrm{d}t$.

Avec l'égalité vue en question 4, on a :

$$nI_n = \int_1^{+\infty} u^{1/n}\frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u$$

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $f_n : u \mapsto u^{1/n}\dfrac{e^{-u}}{u}$.
• $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad f_n$ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
• $\forall u \geqslant 1 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(u) = \dfrac{e^{-u}}{u}$.
La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $[1, +\infty[$ vers la fonction $f : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{u}$ qui est continue sur $[1, +\infty[$.
• On sait que la fonction $\varphi : u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Pour $n \in \mathbf{N}^\star$, $\dfrac{1}{n} - 1 < 0$ donc pour $u \in [1, +\infty[$, $\quad 0 < u^{1/n-1} \leqslant 1$ et $0 < e^{-u}$ donc par produit :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall u \in [1, +\infty[\quad 0 \leqslant f_n(u) \leqslant \varphi(u)$$

Par théorème de convergence dominée, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u$$

$$\boxed{\text{On a donc } \lim_{n\to+\infty} nI_n = J \text{ avec } J = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u.}$$

6. La fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{u}$ est strictement positive et intégrable sur $[1, +\infty[$ alors
$J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u > 0$ et la limite de la question précédente donne : $\boxed{I_n \sim \dfrac{J}{n}.}$

7. •L'équivalent précédent donne immédiatement $\boxed{\text{la divergence de la série à termes positifs } \sum I_n.}$

• Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ les fonctions $t \mapsto \exp(-t^n)$ sont positives et intégrables sur $[1, +\infty[$ (voir question 1).

De plus pour $t \in [1, +\infty[$ et $n \in \mathbf{N}^* \quad t^n \leqslant t^{n+1}$, donc $0 \leqslant \exp(-t^{n+1}) \leqslant \exp(-t^n)$ et par croissance de l'intégrale $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.

La suite (I_n) est positive, décroissante et converge vers 0 d'après la question 3, alors par critère spécial des séries alternées, $\boxed{\text{la série alternée } \sum(-1)^n I_n \text{ converge.}}$

8. On pose, pour tout réel x et lorsque cela est possible $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$.

D'après ce qui précède le domaine de définition de f contient (-1) mais pas 1.

• Pour $x > 1$ $\quad I_n x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{J}{n} x^n$ avec $J > 0$, alors par croissances comparées $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n x^n = +\infty$ et la série $\sum I_n x^n$ diverge grossièrement.

• Pour $x < -1$, on a : $I_n|x|^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{J}{n}|x|^n$ avec $J > 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |I_n x^n| = +\infty$ et la série $\sum I_n x^n$ diverge grossièrement.

• On sait que $I_n \geqslant 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$, alors : $\exists n_0 \in \mathbf{N}^* \quad \forall n \geqslant n_0 \quad 0 \leqslant I_n \leqslant 1$.
Si $x \in]-1, 1[$, $\quad \forall n \geqslant n_0 \quad 0 \leqslant |I_n x^n| \leqslant |x|^n$ et on sait que la série géométrique $\sum |x|^n$ converge, alors par théorème de comparaison pour des séries à termes positifs, la série $\sum I_n x^n$ converge absolument, donc converge. *Dans ce dernier cas, on pouvait aussi appliquer la règle de d'Alembert.*

$\boxed{\text{On en déduit que le domaine de définition de } f \text{ est l'intervalle } [-1, 1[.}$

Remarque, on verra une autre méthode lorsque nous aurons travaillé sur les séries entières.

Problème : Extrait de Centrale-Supélec 2024 PC

Soit $p \in \mathbf{N}$ et $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant p$,

$$P_n = \prod_{k=p}^{n} u_k.$$

On dit que la suite $(P_n)_{n\geqslant p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant p} u_n$.
Si la suite $(P_n)_{n\geqslant p}$ converge, on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} P_n.$$

Partie 1 : Deux exemples

9. Soit $N \in \mathbf{N}^\star$.

$$\begin{aligned}
\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \prod_{n=2}^{N}\frac{n^2-1}{n^2}\\
&= \prod_{n=2}^{N}\left(\frac{n-1}{n}.\frac{n+1}{n}\right)\\
&= \left(\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}\right).\left(\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n}\right)\\
&\quad \text{par télescopage, il reste}\\
&= \frac{1}{N}.\frac{N+1}{2}\\
\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \frac{N+1}{2N}
\end{aligned}$$

Et par passage à la limite quand N tend vers $+\infty$, on obtient : $\boxed{\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.}$

10. Pour tout $N \geqslant 2$, en scindant le produit suivant les indices pairs et les indices impairs on a :

$$\begin{aligned}
\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) &= \left(\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{1}{2k}\right)\right).\left(\prod_{k=1}^{N-1}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)\right)\\
&= \left(\prod_{k=1}^{N}\left(\frac{2k-1}{2k}\right)\right).\left(\prod_{j=2}^{N}\left(1+\frac{1}{2j-1}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}.\left(\prod_{j=2}^{N}\frac{2k-1}{2k}\right).\left(\prod_{j=2}^{N}\frac{2j}{2j-1}\right)
\end{aligned}$$

Donc $P_{2N}=\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)=\frac{1}{2}$ et $P_{2N+1}=P_{2N}.\left(1+\frac{1}{2N+1}\right)$.

On en déduit que $\lim_{N\to+\infty}P_{2N}=\frac{1}{2}=\lim_{N\to+\infty}P_{2N+1}$.

$$\boxed{\text{Et par conséquent : }\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)=\frac{1}{2}.}$$

Partie 2 : Résultats préliminaires

11. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on note (P_n) la propriété :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left| \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + |x_k|) \right) - 1.$$

• Pour $n = 1$ et $x_1 \in \mathbb{R}$, $|(1 + x_1) - 1| = |x_1|$ et $(1 + |x_1|) - 1 = |x_1|$, donc $|(1 + x_1) - 1| \leqslant (1 + |x_1|) - 1$. La propriété (P_1) est vraie.

• Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que (P_n) soit vraie. Montrons que (P_{n+1}) est encore vraie :
Soit $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Par inégalité triangulaire : $0 \leqslant |1 + x_k| \leqslant 1 + |x_k|$ et par produit d'inégalités positives : $\prod_{k=1}^{n} |1 + x_k| \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1 + |x_k|)$, alors :

$$\begin{aligned} \left| \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 + x_k) \right) - 1 \right| &= \left| \left((1 + x_{n+1}) \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \right) - 1 \right| \\ &= \left| \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) - 1 \right) + \left(x_{n+1} \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \right) \right| \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire on a :

$$\begin{aligned} \left| \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 + x_k) \right) - 1 \right| &\leqslant \left| \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) - 1 \right| + |x_{n+1}| . \left| \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \right| \\ &\leqslant \left| \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) - 1 \right| + |x_{n+1}| . \prod_{k=1}^{n} (1 + |x_k|) \end{aligned}$$

en utilisant que (P_n) est vraie, il vient

$$\leqslant \left(\left(\prod_{k=1}^{n} (1 + |x_k|) \right) - 1 \right) + |x_{n+1}| . \prod_{k=1}^{n} (1 + |x_k|)$$

$$\left| \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leqslant (1 + |x_{n+1}|) . \prod_{k=1}^{n} (1 + |x_k|) \quad - 1$$

Et finalement

$$\left| \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 + |x_k| \right) - 1$$

Ce qui termine la récurrence.

On a obtenu : $\boxed{\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left| \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + |x_k|) \right) - 1.}$

12. Soit $(x_1,\dots,x_n)\in[-1,+\infty[^2$. Par convexité de la fonction exp sur $\mathbf{R}$ (courbe au dessus de sa tangente en $x=0$), on sait que :

$$\forall k\in [\![1,n]\!]\quad 0\leqslant 1+x_k\leqslant \exp(x_k)$$

Alors par produit d'inégalités positives : $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right).}$

Partie 3 : Etude d'une fonction définie par un produit infini

On considère dans cette partie :

- a et b deux réels tels que $a<b$ et le segment $\mathcal{S}=[a,b]$.
- $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies et continues sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $]-1,+\infty[$.
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}|f_n|$ est une série de fonctions qui converge uniformément sur $\mathcal{S}$.
- Pour tout $n\in\mathbf{N}^\star$ et $x\in\mathcal{S}$:

$$P_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(1+f_k(x)),\quad Q_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(1+|f_k(x)|),\quad R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}|f_k(x)|.$$

13. • Pour tout $x\in\mathcal{S}$ et $n\in\mathbb{N}^\star$, on remarque que $Q_{n+1}(x)=(1+|f_{n+1}(x)|).Q_n(x)$ alors

$$Q_{n+1}(x)-Q_n(x)=|f_{n+1}(x)|.Q_n(x)$$

• D'après le résultat de la question 12, on peut écrire $Q_n(x)\leqslant \exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|\right)$.

• Par hypothèse les fonctions f_k sont continues sur le segment $\mathcal{S}$ et la série de fonctions $\sum|f_k|$ converge uniformément sur ce segment, d'après le théorème de continuité, on sait que la fonction $R_0:x\mapsto\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}|f_k(x)|$ est continue sur le segment $\mathcal{S}$. On en déduit que R_0 est bornée sur ce segment donc :

$$\exists M>0\quad\forall x\in\mathcal{S}\quad R_0(x)\leqslant M$$

• Puisque $\forall k\in\mathbf{N}^\star\quad\forall x\in\mathcal{S}\quad|f_k(x)|\geqslant 0$, on a :

$$\forall n\in\mathbf{N}^\star\quad\forall x\in\mathcal{S}\quad \sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|\leqslant R_0(x)\leqslant M$$

Par croissance de la fonction exp, on obtient alors :

$$\forall n\in\mathbf{N}^\star\quad\forall x\in\mathcal{S}\quad Q_n(x)\leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|\right)\leqslant e^M$$

On a finalement : $\boxed{\exists M>0\quad\forall n\in\mathbf{N}^\star\quad\forall x\in\mathcal{S}\quad Q_{n+1}(x)-Q_n(x)\leqslant \mathrm{e}^M|f_{n+1}(x)|.}$

14. Pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, $P_{n+1}(x) = (1 + f_{n+1}(x)).P_n(x)$ donc
$P_{n+1}(x) - P_n(x) = f_{n+1}(x).P_n(x)$.

Par inégalité triangulaire $\forall k \in \mathbf{N}^\star \quad 0 \leqslant |1+f_k(x)| \leqslant 1+|f_k(x)|$, alors par produit d'inégalités positives :

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1 + f_k(x))\right| = \prod_{k=1}^{n}|1 + f_k(x)| \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1 + |f_k(x)|)$$

Ce qui donne : $|P_n(x)| \leqslant Q_n(x)$ et donc

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| = |f_{n+1}(x)|.|P_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)|.Q_n(x)$$

On a vu $Q_{n+1}(x) - Q_n(x) = |f_{n+1}(x)|.Q_n(x)$ donc $\boxed{|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leqslant Q_{n+1}(x) - Q_n(x).}$

15. **D'après le tout début de l'énoncé, un produit infini existe si et seulement si la suite des produits partiels converge. Il faut donc ici d'abord prouver la convergence simple de la suite de fonctions (P_n).**

• D'après les inégalités des questions 13 et 14, pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$, on a :

$$0 \leqslant |P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leqslant e^M |f_{n+1}(x)|$$

Par hypothèse la série de fonctions $\sum |f_k|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$, alors la série $\sum |f_{n+1}(x)|$ converge et par comparaison la série télescopique $\sum P_{n+1}(x) - P_n(x)$ converge absolument, donc converge. On sait alors que la suite $(P_n(x))$ converge.

$\boxed{\text{On a obtenu la convergence simple sur } \mathcal{S} \text{ de la suite de fonctions } (P_n).}$

La fonction $P = \lim\limits_{n\to+\infty} P_n : x \mapsto \prod\limits_{k=1}^{+\infty}(1 + f_k(x))$ est bien définie sur $\mathcal{S}$.

• De plus par inégalité triangulaire (puisqu'il y a convergence absolue), pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$

$$|P(x) - P_n(x)| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} P_{k+1}(x) - P_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} |P_{k+1}(x) - P_k(x)| \leqslant e^M \sum_{k=n}^{+\infty} |f_{k+1}(x)|$$

On a donc $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in \mathcal{S} \quad |P(x) - P_n(x)| \leqslant e^M R_n(x)$.

Par hypothèse la série de fonctions $\sum |f_k|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$, alors la suite (R_n) est une suite qui converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathcal{S}$, on a alors

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in \mathcal{S} \quad |P(x) - P_n(x)| \leqslant e^M \|R_n\|_\infty \qquad \text{avec } \|R_n\|_\infty = \underset{x\in[a,b]}{Sup} |R_n(x)|$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad P - P_n$ est bornée sur $\mathcal{S}$ et $0 \leqslant \|P - P_n\|_\infty \leqslant e^M \|R_n\|_\infty$.

Par théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \|P - P_n\|_\infty = 0$, donc

$\boxed{\text{la suite de fonctions } (P_n) \text{ converge uniformément sur } \mathcal{S} \text{ vers la fonction } P.}$

16. • Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ f_n est continue sur $\mathcal{S}$, alors par produit, la fonction P_n est continue sur $\mathcal{S}$. Puisqu'il y a convergence uniforme sur $\mathcal{S}$ de la suite de fonctions (P_n) vers la fonction P, par théorème de continuité, la fonction P est continue sur $\mathcal{S}$.

   • On sait que $\forall x \in \mathcal{S} \quad P(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x)$.
   Soit $x \in \mathcal{S}$, par hypothèse $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, f_n est à valeurs dans $]-1, +\infty[$, donc $\ln(1 + f_n(x))$ existe et on peut écrire : $\ln(P_n(x)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + f_k(x))$.
   Puisque la série $\sum f_k(x)$ converge absolument, on a : $\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = 0$, alors $\ln(1 + f_k(x)) \underset{k\to+\infty}{\sim} f_k(x)$, et par comparaison la série $\sum \ln(1 + f_k(x))$ converge absolument, donc converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(P_n(x)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 + f_k(x))$$

   Notons $L(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 + f_k(x))$, par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on a :

$$P(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \exp(\ln(P_n(x))) = e^{L(x)} > 0$$

La fonction P est donc continue et ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.

17. On suppose de plus que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ telle que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{f_n'}{1 + f_n}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

   Pour $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $g_n : x \mapsto \ln(1 + f_n(x))$.

   • On vient de voir précédemment, qu'il y a convergence absolue de $\sum g_n(x)$ pour tout x de $\mathcal{S}$, donc la série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement sur $\mathcal{S}$.

   • $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, g_n est de classe C^1 sur $\mathcal{S}$ par composée des fonctions ln et $x \mapsto 1 + f_n(x)$ et $\forall x \in \mathcal{S} \quad \forall n \in \mathbf{N}^\star \quad g_n'(x) = \frac{f_n'(x)}{1 + f_n(x))}$.

   • Par hypothèse la série de fonctions $\sum g_n'$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

   Par théorème de dérivation terme à terme, on sait que la fonction $L : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ est de classe C^1 sur $\mathcal{S}$ avec $L'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'(x)}{1 + f_n(x)}$.
   Or on a vu dans la preuve de la question 16 que $\forall x \in \mathcal{S}, \quad P(x) = \exp(L(x)) > 0$.
   Par composée, la fonction P est de classe C^1 sur $\mathcal{S}$, et $L(x) = \ln(P(x))$ donc $L'(x) = \frac{P'(x)}{P(x)}$, ce qui donne

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{S},\ \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}}$$

18. ***Étude d'une fonction particulière***

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose $f(x) = \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - e^{-nx^2}\right)$.

(a) Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$, notons $\mathcal{S} = [a, b]$.
On va essayer d'appliquer les résultats précédents avec $f_n : x \mapsto -\exp(-nx^2)$, puisqu'alors $f(x) = \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(1 + f_n(x))$.

• $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, f_n est définie et continue sur le segment $\mathcal{S}$ et à valeurs dans $]-1, +\infty[$ car $\forall x > 0 \quad e^{-nx^2} < 1$.

• $\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad \forall x \in \mathcal{S} \quad |f_n(x)| = \exp(-nx^2)$. Par décroissance de la fonction $x \mapsto e^{-nx^2}$ sur le segment $\mathcal{S}$, on a : $\|f_n\|_\infty^{[a,b]} = \displaystyle\mathop{Sup}_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = e^{-na^2} = \left(e^{-a^2}\right)^n$.
Puisque $a > 0$, on a : $0 < e^{-a^2} < 1$ et donc la série géométrique $\sum e^{-na^2}$ converge.

On en déduit que la série $\sum \|f_n\|_\infty^{[a,b]}$ converge. La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur le segment $\mathcal{S}$, donc la série $\sum |f_n|$ converge uniformément sur le segment $\mathcal{S}$.

D'après le résultat de la question 15, on sait que f est définie et continue sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$.

$\boxed{\text{Par conséquent la fonction } f \text{ est définie et continue sur }]0, +\infty[.}$

(b) • *Étude des variations de f :*

Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$0 < x < y \Longrightarrow -nx^2 < -ny^2 \Longrightarrow \exp(-nx^2) < \exp(-ny^2) < 1 \Longrightarrow 0 < 1-e^{-nx^2} < 1-e^{-ny^2}$

Par produit on aura $0 < x < y \Longrightarrow \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1 - e^{-nx^2}) < \prod_{k=1}^{n}(1 - e^{-ny^2})$, et par passage à la limite quand n tend vers l'infini :

$$0 < x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est croissante sur }]0, +\infty[.}$

- *Étude de la limite en 0 de f :*

Pour $n \in \mathbf{N}^\star$ et $x \in]0, +\infty[$, on a $-e^{-nx^2} > -1$ alors par le résultat de la question 12 :

$$0 \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1 - e^{-nx^2}) \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n}(-e^{-kx^2})\right)$$

La série géométrique $\sum(e^{-x^2})^n$ converge ($0 < e^{-x^2} < 1$) alors par passage à la limite quand n tend vers l'infini avec la continuité de la fonction exp, on obtient :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \exp\left(-\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-x^2})^n\right)$$

ce qui donne :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \exp\left(-\frac{e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+}(1 - e^{-x^2}) = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\exp\left(-\dfrac{e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}\right) = 0$.

Par théorème d'encadrement $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0.}$

- *Étude de la limite en $+\infty$ de f :*

En appliquant la question 11 puis la question 12, on peut écrire, pour $n \in \mathbf{N}^\star$ et $x \in]0, +\infty[$ (on prend $x_k = -e^{-kx^2}$) :

$$\left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1 - e^{-kx^2})\right) - 1\right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(1 + e^{-kx^2})\right) - 1 \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-kx^2}\right) - 1$$

Et comme précédemment par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, il vient :

$$0 \leqslant |f(x) - 1| \leqslant \exp\left(\frac{e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}\right) - 1$$

Or $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty}\exp\left(\dfrac{e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}\right) - 1 = 0$ et par théorème d'encadrement $\lim\limits_{x\to +\infty}|f(x) - 1| = 0$.

On a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1.}$

Exercice 2 : Extrait de CCINP 2013 TSI

Dans tout l'exercice α désigne un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.
On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$$

On rappelle que la notation $\sin^2(x)$ désigne $(\sin(x))^2$.

19. $\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad 0 \leqslant \left|\dfrac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, or la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc par comparaison la série $\sum \dfrac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$ converge absolument, donc converge.

    On admet désormais le résultat suivant : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$**.**

20. • La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.

    • On sait que $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0.

    • $\forall x \in [1,+\infty[\quad |f(x)| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ et $2 > 1$ alors la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ d'après les intégrales de Riemann. Par théorème de comparaison f est aussi intégrable sur $[1,+\infty[$.

    $\boxed{\text{Finalement } f \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$

21. Par dérivée d'un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$, on sait que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{2\sin(x)\cos(x)x^2 - \sin^2(x)(2x)}{x^4} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{x^2} - \frac{2\sin^2(x)}{x^3}$$

22. Soit $x \in]0,+\infty[$,
    • D'après l'expression de $f'(x)$ et par inégalité triangulaire on a :

$$\left|x\sqrt{x}f'(x)\right| \leqslant \frac{2|\sin(x)\cos(x)|}{\sqrt{x}} + \frac{2\sin^2(x)}{x\sqrt{x}}$$

    Puisque $|\sin(x)| \leqslant 1$ et $|\cos(x)| \leqslant 1$, on obtient : $\boxed{\forall x > 0 \quad |x\sqrt{x}f'(x)| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x\sqrt{x}}.}$

    On a aussi $|\sin(x)| \leqslant x$ et $|\cos(x)| \leqslant 1$ pour $x > 0$, alors

$$\left|x\sqrt{x}f'(x)\right| \leqslant \frac{2|\sin(x)\cos(x)|}{\sqrt{x}} + \frac{2\sin^2(x)}{x\sqrt{x}} \leqslant \frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{2x^2}{x\sqrt{x}}$$

    Ce qui donne $\boxed{\forall x > 0 \quad |x\sqrt{x}f'(x)| \leqslant 4\sqrt{x}.}$

23. • Si $x \geqslant 1$ alors $\sqrt{x} \geqslant 1$ et en utilisant la première inégalité de la question précédente on obtient :

$$|x\sqrt{x}f'(x)| \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x\sqrt{x}} \leqslant 4$$

• Si $0 < x < 1$ alors $\sqrt{x} \leqslant 1$ et la seconde inégalité de la question précédente donne :

$$|x\sqrt{x}f'(x)| \leqslant 4\sqrt{x} \leqslant 4$$

$$\boxed{\text{Finalement } \forall x \in]0, +\infty[\quad |f'(x)| \leqslant \frac{4}{x\sqrt{x}}}$$

24. Pour tout entier N strictement positif, par relation de Chasles, on a :

$$\int_{\alpha}^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N} \int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x$$

Par le changement de variable affine $x = t + n\alpha = \varphi(t)$, puisque φ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ avec $\varphi(0) = \alpha$ et $\varphi(\alpha) = (n+1)\alpha$, on a :

$$\boxed{\int_{\alpha}^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N} \int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N} \int_{0}^{\alpha} \frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2}\mathrm{d}t}$$

On peut écrire $\dfrac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} = \alpha.\dfrac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} = \displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\mathrm{d}t$, alors par linéarité de l'intégrale sur un segment, avec l'égalité précédente, on a :

$$\boxed{\int_{\alpha}^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} = \sum_{n=1}^{N} \int_{0}^{\alpha} \left(\frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\right)\mathrm{d}t}$$

25. A l'aide de la question 23, on peut écrire, pour $n \in \mathbf{N}^\star$:

$$\forall x \in [n\alpha, (n+1)\alpha] \quad |f'(x)| \leqslant \frac{4}{x^{3/2}} \leqslant \frac{4}{(n\alpha)^{3/2}}$$

Alors par l'inégalité des acroissements finis appliquée à la fonction f sur $[n\alpha, (n+1)\alpha]$, on sait que :

$$\forall t \in [0, \alpha] \quad |f(n\alpha + t) - f(n\alpha)| \leqslant \frac{4}{(n\alpha)^{3/2}}.|n\alpha + t - n\alpha|$$

ce qui donne

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^\star \quad \forall t \in [0, \alpha] \quad \left|\frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\right| \leqslant \frac{4t}{(n\alpha)^{3/2}}}$$

26. Par croissance de l'intégrale sur le segment $[0, \alpha]$, l'inégalité précédente entraine :
$$\forall n \in \mathbf{N}^\star \quad \int_0^\alpha \left| \frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{4}{(n\alpha)^{3/2}} \int_0^\alpha t\mathrm{d}t$$
Et après calcul de la dernière intégrale :
$$\forall n \in \mathbf{N}^\star \quad \int_0^\alpha \left| \frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{2\alpha^2}{(n\alpha)^{3/2}}$$
Pour tout entier N strictement positif, par somme des inégalités précédentes pour $n \in [\![1, N]\!]$, il vient : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^N \int_0^\alpha \left| \frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right| \mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n\sqrt{n}}}$

27. • Par les résultats des questions 24-25-26 et par deux inégalités triangulaires (une sur une somme, une sur une intégrale) on sait que :
$$\left| \int_\alpha^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^N \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} \right| \leqslant \sum_{n=1}^N \int_0^\alpha \left| \frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right| \mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n\sqrt{n}}$$
• Par le résultat de la question 20, on sait que $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ converge alors on peut écrire
$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{N\to+\infty} \int_\alpha^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x$$
• Par le résultat de la question 19, on sait que la série $\displaystyle\sum \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$ converge alors la série $\displaystyle\sum \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha}$ converge aussi et par le résultat admis dans l'énoncé : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} = \frac{(\pi-\alpha)}{2}$.

• On sait que la série de Riemann $\displaystyle\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

On peut donc passer à la limite quand N tend vers $+\infty$ sur l'inégalité :
$$\left| \int_\alpha^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^N \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} \right| \leqslant 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n\sqrt{n}}$$
pour obtenir
$$\left| \int_\alpha^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \frac{\pi-\alpha}{2} \right| \leqslant 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$
Toujours par la question 20 on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to0} \int_\alpha^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x$, alors en passant à la limite quand α tend vers 0 sur l'inégalité précédente, il vient :
$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} \right| \leqslant 0$$
ce qui donne : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.}$