Pour u endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ et n entier naturel non nul, on note $u^n = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$.

On note $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbf{R})$ le groupe des matrices inversibles de , et I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Pour deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, on rappele que l'on dit que la matrice A est **semblable** à la matrice B s'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbf{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$.

On rappelle que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de $\mathbf{R}^3$, si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, si A est la matrice de d'un endomorphisme u de $\mathbf{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}'$ et B la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ alors $A = P^{-1}BP$ (c'est-à-dire, la matrice A est semblable à la matrice B).

Partie A

On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B.

question 1 Démontrer les relations :

- $A \sim A$,
- $A \sim B \Longrightarrow B \sim A$,
- $(A \sim B$ et $B \sim C) \Longrightarrow A \sim C$.

On peut désormais dire que les matrices A et B **sont** semblables.

question 2

Démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ de déterminants différents ne sont pas semblables.

question 3

Soit u un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ et soit i et j deux entiers naturels.

On considère l'application ω de $Ker\,(u^{i+j})$ vers $\mathbf{R}^3$ définie par : $\forall x \in Ker\,(u^{i+j}) \quad \omega(x) = u^j(x)$.

1. Montrer que $Im(\omega) \subset Ker(u^i)$.

2. En déduire que $\dim(Ker(u^{i+j})) \leq \dim(Ker(u^i)) + \dim((Ker u^j))$.

question 4

Soit u un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ vérifiant : $u^3 = 0$ et rang $(u) = 2$.

1. Montrer que $\dim(Ker(u^2)) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question **3.2**.).

2. Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de $\mathbf{R}^3$ tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

3. Ecrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.

question 5

Soit u un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ vérifiant : $u^2 = 0$ et rang $(u) = 1$.

1. Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de $\mathbf{R}^3$ tel que $u(b) \neq 0$.

2. Justifier l'existence d'un vecteur c de $Ker(u)$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

3. Ecrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1}.

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $GL_3(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

question 6

Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.

question 7

Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

question 8

On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

question 9

On suppose dans cette question que $rang(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

1. Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire, en utilisant la question **4.**, une matrice semblable à la matrice M.

2. Calculer M^3 et déterminer rang (M).

3. Montrer que les matrices M et N sont semblables.

4. Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

question 10

On suppose dans cette question que rang $(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.

Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

question 11

Exemple : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3).

1. Montrer que $Ker(u - id_{\mathbf{R}^3})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ de dimension 2 dont on donnera une base (a, b).
2. Justifier que la famille (a, b, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$, et écrire la matrice de u dans cette base.
3. Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

question 12

Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Fin de l'énoncé