On admet le résultat suivant : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathbf{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$**.**

On appelle intégrales de Fresnel, les intégrales : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(t^2)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(t^2)\mathrm{d}t$ et celles qui en découlent.

Partie I : Existence d'intégrales

1. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ sont continues sur $]0,1]$ par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,1]$. De plus :

$$\forall t \in)0,1], \quad \left|\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}} \qquad \left|\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$$

D'après les intégrales de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$, on sait que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$ $(\alpha = \dfrac{1}{2} < 1)$.

$$\boxed{\text{Par comparaison, les fonctions } t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \text{ et } t \mapsto \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \text{ sont intégrables sur }]0,1].}$$

On pouvait aussi utiliser un équivalent en 0 *de chacune des fonctions.*

2. Notons $I = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

Les fonctions $u : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $v_1 : t \mapsto \sin(t)$ et $v_2 : t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe C^1 sur $[1,+\infty[$. Par produit dune fonction bornée par une fonction de mlimite nulle, on sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v_1(t) = 0 = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v_2(t)$.

On en déduit par intégration par parties que les intégrales $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} u(t)v_1'(t)\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} u(t)v_2'(t)\mathrm{d}t$ convergent si, et seulement si les intégrales $I_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} u'(t)v_1(t)\mathrm{d}t$ et $J_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} u'(t)v_2(t)\mathrm{d}t$ convergent. Or

$$\forall t \in [1,+\infty[\quad |u'(t)v_1(t)| = \left|\frac{-\sin(t)}{2t\sqrt{t}}\right| \leqslant \frac{1}{2t^{3/2}} \qquad |u'(t)v_1(t)| \leqslant \frac{1}{2t^{3/2}}$$

On sait que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$, alors les intégrales I_1 et J_1 convergent et finalement $\boxed{\text{les intégrales } I = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \text{ et } J = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \text{ convergent.}}$

3. $\forall t \in]0,+\infty[\quad e^{-it^2} = \cos(t^2) - i\sin(t^2)$, donc la fonction $t \mapsto e^{-it^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-it^2}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, les intégrales $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\mathrm{d}t$ et $J_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$ convergent.

   On pose $t = \sqrt{u} = \varphi(u)$, avec $\varphi : u \mapsto \sqrt{u}$ qui est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et réalise une bijection croissante de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.
   Par ce changement de variable on sait que les intégrales I_2 et J_2 convergent si, et seulement si les intégrales $I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi'(u)\cos(\varphi^2(u))\mathrm{d}u$ et $J_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi'(u)\sin(\varphi^2(u))\mathrm{d}u$ convergent.

   Or $I_3 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ et $J_3 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ convergent d'après les questions 1 et 2.

   $$\boxed{\text{L'intégrale de Fresnel } \int_0^{+\infty} e^{-it^2}\mathrm{d}t \text{ est donc convergente.}}$$

Partie II : Une fonction définie comme intégrale à paramètre

Soit $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(i+t^2)x^2}}{i+t^2}\mathrm{d}t$.

4. Posons $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\times]0,+\infty[& \to & \mathbf{C} \\ t & \mapsto & \dfrac{e^{-(i+t^2)x^2}}{i+t^2} \end{array}$.

   • Pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbf{R}$ puisque la fonction $x \mapsto e^{\alpha x^2}$ l'est avec $\alpha \in \mathbf{C}$.

   • Pour $x \in \mathbf{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ par quotient de fonctions usuelles continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$.

   • $\forall (x,t) \in \mathbf{R}\times[0,+\infty[\quad |e^{-(i+t^2)x^2}| = |e^{-ix^2}|.|e^{-t^2x^2}| = e^{-t^2x^2} \leqslant 1$, de plus $|i+t^2| = \sqrt{t^4+1}$, on en déduit que :

   $$\forall (x,t) \in \mathbf{R}\times[0,+\infty[\quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \text{ avec } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$$

   La fonction φ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ qui est intégrable en $+\infty$ $(2 > 1)$, alors φ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

   Par théorème de continuité sous le signe $\displaystyle\int$, on sait que $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est définie et continue sur } \mathbf{R}.}$

5. On a vu $\forall (x,t) \in \mathbf{R}\times]0,+\infty[\quad |e^{-(i+t^2)x^2}| = e^{-t^2x^2}$, alors $\forall t \in]0,+\infty[\quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} |f(x,t)| = 0$, donc $\forall t \in]0,+\infty[\quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x,t) = 0$.

$\forall x \in \mathbf{R}, \quad t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto 0$ sont continues sur $]0,+\infty[$.

On a aussi vu : $\forall (x,t) \in \mathbf{R} \times [0,+\infty[\quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ et la fonction φ est intégrable sur $[0,+\infty[$, alors par théorème de convergence dominée à paramètre continu, on sait que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x,t)\mathrm{d}t = 0.}$

6. • Pour $x \in]0,+\infty[\quad t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ d'après la domination précédente : $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$.

   • $\forall t \in [0,+\infty[\quad x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-(i+t^2)x^2}$.

   • On en déduit que pour $x \in]0,+\infty[, \quad t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

   • Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$, on a :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[\quad 0 < 2x \leqslant 2b \text{ et } 0 < e^{-x^2t^2} \leqslant e^{-a^2t^2}$$

   alors par produit $\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[\quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2be^{-a^2t^2}$.
   La fonction $\psi : t \mapsto 2be^{-a^2t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, avec par croissances comparées puisque $a > 0$, $\psi(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. ψ est donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

   Par théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ avec hypothèse de domination sur tout segment, on sait que $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$

7. Le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ donne aussi la formule de Leibniz :

$$\forall x > 0 \quad h'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -2xe^{(i+t^2)x^2}\mathrm{d}t = -2xe^{-ix^2}\int_0^{+\infty} e^{-(xt)^2}\mathrm{d}t$$

   La changement de variable affine $t = \dfrac{u}{x}$ permet d'obtenir :

$$\forall x > 0 \quad h'(x) = -2xe^{-ix^2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{x}\mathrm{d}u$$

   Avec la valeur de l'intégrale de Gauss admise en début d'énoncé, on obtient :

$$\boxed{\forall x > 0 \quad h'(x) = -\sqrt{\pi}.e^{-ix^2}.}$$

8. On remarque que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} h'(x)\mathrm{d}x$ et on sait (question 3) que l'intégrale converge.

Puisque h est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et continue sur $[0,+\infty[$ avec une limite nulle en $+\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{]0,+\infty[} h'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[h(x)\right]_{x\to 0}^{x\to+\infty} = \frac{h(0)}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+i}\mathrm{d}t$$

Partie III : Calculs d'intégrales

9. • La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^4}$ est continue sur $[0,+\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction polynômiale qui ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$. De plus $\dfrac{1}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^4}$ et on sait que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^4}$ est intégrable en $+\infty$ puisque $4>1$.

   Par comparaison la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^4}$ est intégrable sur $[0,n+\infty[$, donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

   • Sur l'intégrale précédente on effectue le changement de variable $t = \dfrac{1}{u} = \varphi(u)$. Puisque $\varphi : u \mapsto \dfrac{1}{u}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et est une bijection décroissante de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi'(u)\frac{1}{1+\varphi^4(u)}\mathrm{d}u$ converge et

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^4+1}\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty}\varphi'(u)\frac{1}{1+\varphi^4(u)}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u}$$

10. On a vu

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+i}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{t^2-i}{1+t^4}\mathrm{d}t$$

   Et par les résultats précédents, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^4+1}\mathrm{d}t$ convergent alors par linéarité :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t - i\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t - i\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t\right)\\
\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x &= \frac{1-i}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

   On a aussi $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t$, donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x = \frac{1-i}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{t^2+1}{t^4+1}\mathrm{d}t.}$$

11. Par réduction au même dénominateur, on a :

$$\forall t \in [0,+\infty[\quad \frac{a}{t^2+t\sqrt{2}+1}+\frac{b}{t^2-t\sqrt{2}+1}=\frac{(a+b)t^2+(b-a)\sqrt{2}t+(a+b)}{1+t^4}$$

En prenant $a=b=\dfrac{1}{2}$ on obtient : $\boxed{\dfrac{t^2+1}{t^4+1}=\dfrac{1/2}{t^2+t\sqrt{2}+1}+\dfrac{1/2}{t^2-t\sqrt{2}+1}.}$

Autre rédaction :
Par réduction au même dénominateur, on a :

$$\forall t \in [0,+\infty[\quad \frac{a}{t^2+t\sqrt{2}+1}+\frac{b}{t^2-t\sqrt{2}+1}=\frac{(a+b)t^2+(b-a)\sqrt{2}t+(a+b)}{1+t^4}$$

On en déduit que

$$\frac{a}{t^2+t\sqrt{2}+1}+\frac{b}{t^2-t\sqrt{2}+1}=\frac{t^2+1}{1+t^4} \Longleftrightarrow (a+b)t^2+(b-a)\sqrt{2}t+(a+b)=t^2+1$$

Par unicité de la fonction polynômiale associée à un polynôme et par unicité des coefficients d'un polynôme, on a :

$$\forall t \in [0,+\infty[\quad (a+b)t^2+(b-a)\sqrt{2}t+(a+b)=t^2+1 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b=1 \\ b-a=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$$

12. On peut encore écrire pour $t \in [0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\frac{t^2+1}{t^4+1} &= \frac{1/2}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1/2}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{1+\left(1+\sqrt{2}t\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\sqrt{2}t-1\right)^2} \\
\frac{t^2+1}{t^4+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\left(1+\sqrt{2}t\right)^2}+\frac{\sqrt{2}}{1+\left(\sqrt{2}t-1\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x &= \frac{1-i}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{t^2+1}{t^4+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi}}\left[\arctan\left(1+\sqrt{2}t\right)+\arctan\left(\sqrt{2}t-1\right)\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\arctan(1)-\arctan(-1)\right) \\
&= \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi}}.\pi
\end{aligned}$$

On a donc obtenu : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x = \frac{(1-i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.}$

Par le changement de variable vu en question 3 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

Et puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-it^2}\mathrm{d}t\right)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-it^2}\mathrm{d}t\right)$, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.}$$