Exercice 1

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{n^3 + 2n^2 - 4n + 1}{n!}$.

1. Justifier que $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.
2. Déterminer les coordonnées de $P = X^3 + 2X^2 - 4X + 1$ dans cette base.
3. Conclure quant à la convergence de la série $\sum u_n$ et calculer sa somme.

Exercice 2

Pour $p \in \mathbf{N}^*$, on définit $f_p : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ par $f_p(x) = \sin(px)$.

1. Calculer $I(p,q) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_p(x) f_q(x) \mathrm{d}x$ pour tout $(p,q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la famille $(f_p)_{1 \leqslant p \leqslant n}$ est libre.

Exercice 3

Montrer que l'égalité $AB - BA = I_n$ est impossible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Exercice 4

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad tr(AX) = tr(BX) \Longleftrightarrow A = B$$

Exercice 5

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Montrer que si $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \varphi(AB) = \varphi(BA)$ alors il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\varphi = \lambda tr$.

Exercice 6

Que peut-on dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $tr(A.A^T) = 0$?

Exercice 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ fixée. On définit $f : M \in \mathcal{A}_n(\mathbf{K}) \mapsto A^T.M + MA$.

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ espace vectoriel des matrices antisymétriques.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$.
3. Calculer $tr(f)$ en fonction de $tr(A)$.

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, en déduire un polynôme annulateur de A, que l'on note P.
2. Justifier que A est inversible et donner son inverse A^{-1}.

3. Soit a et b deux complexes et $M = aA + bI_3$. Calculer M^n (on pourra étudier le reste de la division euclidienne de X^k par P).

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme annulateur unitaire de A et de degré le plus petit possible.
2. Pour $k \in \mathbf{N}$, calculer A^k. en explicitant ses coefficients.

Exercice 10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$. Déterminer un polynôme annulateur de A.

Exercice 11

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On note $\mathcal{A}_M$ l'ensemble des polynômes annulateurs de M. Montrer qu'il existe un polynôme unitaire P_0 tel que $\mathcal{A}_M = \{Q.P_0, \quad Q \in \mathbf{C}[X], Q \neq 0\}$.
P_0 est-il unique ?

Exercice 12

• Donner un polynôme $P \in \mathbf{R}_2[X]$ tel que $P(-1) = 1$, $P(0) = 2$ et $P(1) = 3$. Est-il unique ?
• Donner tous les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ qui vérifient $P(-1) = 1$, $P(0) = 2$ et $P(1) = 3$.

Exercice 13

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^n([a,b], \mathbf{R})$ et n réels $x_1, \ldots, x_n$ tels que $a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant b$. On appelle polynôme d'interpolation de Lagrange de f en ces points l'unique polynôme $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad P(x_i) = f(x_i)$.

1. Donner l'expression de P dans la base d'interpolation de Lagrange associée à ces points.
2. Soit $x \in [a,b]$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad x \neq x_i$. En utilisant le théorème de Rolle sur la fonction $h : t \in [a,b] \mapsto f(t) - P(t) - \dfrac{f(x) - P(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)} \prod_{i=1}^{n}(t - x_i)$, montrer qu'il existe $\xi \in [a,b]$ tel que
$$f(x) - P(x) = \frac{(x - x_1)\cdots(x - x_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)$$
3. En déduire que $\underset{x\in[a,b]}{Sup}|f(x) - P(x) \leqslant \dfrac{C}{n!}\|f^{(n)}\|_\infty^{[a,b]}$, où $C = \underset{x\in[a,b]}{Sup}\left|\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)\right|$.

Exercice 14

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) \mapsto AM$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

2. Déterminer une base de $Ker(f)$.
3. f est-il surjectif ?
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbf{C}) = Ker(f) \oplus Im(f)$?

Exercice 15

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ dont $X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur.

1. Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1} en fonction de f.
2. Montrer que $Im(f + 3Id_E) \subset Ker(f - Id_E)$ et $Im(f - Id_E) \subset Ker(f + 3Id_E)$.
   Justifier que ces sous-espaces sont stables par f.
3. Déterminer deux réels α et β tels que $\forall x \in E, \quad x = \alpha(f(x) - x) + \beta(f(x) + 3x)$.
4. En déduire que $E = Ker(f - Id_E) \oplus Ker(f + 3Id_E)$.
5. Quelle est la forme de la matrice de f dans une base adaptée à l'égalité précédente ?

Exercice 16

Soit $E = C^2([0, 1], \mathbf{R})$. On note :
F l'ensemble des solutions sur $[0, 1]$ de l'équation différentielle $y'' + xy = 0$,
G l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - xy = 0$ et
H l'ensemble des fonctions polynômiales sur $[0, 1]$.

1. Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $F \cap H = \{0\}$ et $H \cap G = \{0\}$.
3. Soit $(f, g, h) \in F \times G \times H$ tel que $f + g + h = 0$. Montrer que $h''(0) = 0$, puis que $f \in H$ et $g \in H$.
4. En déduire que la somme $F + G + H$ est directe.

Exercice 17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^k pour $k \in \mathbf{N}$.
2. Supposons connu un polynôme annulateur de A, que l'on notera P. Déterminer un polynôme annulateur de B.

Exercice 18

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ O_n & 3A \end{pmatrix}$.

1. Expliciter une base de $Ker(B)$ en fonction d'une base de $Ker(A)$. En déduire que $rg(B) = 2rg(A)$.
2. Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ inversible. On note $H = \begin{pmatrix} Q & Q \\ O_n & Q \end{pmatrix}$. Calculer $H^{-1}.B.H$ et en déduire que B est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & 3A \end{pmatrix}$.

Exercice 19

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on pose $B = \begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de B.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit inversible.
3. Lorsque B est inversible, déterminer B^{-1}.

Exercice 20

Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $det(M) = (-1)^n \det \begin{pmatrix} A & -iB \\ iB & -A \end{pmatrix}$.
2. En déduire $det(M) \geqslant 0$.

Exercice 21

Soit f un endomorphisme d'une espace vectoriel E.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite $D = Vect(x)$ soit stable par f.
2. On suppose que E est de dimension finie égale à n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice de f dans cette base soit diagonale.