Dans tout ce chapitre E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

On appelle trace d'une matrice carrée la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\boxed{\text{Si } A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \quad tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}}$$

- L'application trace $A \mapsto tr(A)$ est une forme linéaire.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ alors $\boxed{tr({}^tA) = tr(A)}$
- Si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ alors $\boxed{tr(AB) = tr(BA)}$
- *Invariance par similitude* :

  Si A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et si P est dans $GL_n(\mathbf{K})$ alors $\boxed{tr(P^{-1}AP) = tr(A)}$

  Ce qui revient à dire que deux matrices semblables ont même trace.

En dimension finie, on définit alors la trace d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ comme étant la trace de sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E : $\boxed{tr(u) = tr(Mat_{\mathcal{B}}(u))}$

2 Polynôme d'endomorphisme ou de matrice carrée

Si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors :

- le polynôme de l'endomorphisme u, noté $P(u)$, est l'endomorphisme défini par :

$$\boxed{P(u) = a_0 Id_E + \sum_{k=1}^{p} u^k}$$

- le polynôme de la matrice M, noté $P(M)$, est la matrice définie par :

$$\boxed{P(M) = a_0 I_n + \sum_{k=1}^{p} a_k M^k}$$

Remarque 2.1

• Si D est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et $P \in \mathbf{K}[X]$, exprimer $P(D)$.

• Si $P \in \mathbf{K}[X]$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbf{K})$, exprimer $P\left(QMQ^{-1}\right)$ en fonction de $P(M)$.

Proposition 2.1

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, pour tout $(P, Q) \in \mathbf{K}[X]^2$ et tout $\alpha \in \mathbf{K}$, on a :

$$\boxed{\begin{aligned}&(P+Q)(u) = P(u) + Q(u)\\ &(\lambda P)(u) = \lambda . P(u)\\ &(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)\end{aligned}}$$

de même avec une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Definition 2.1 *Polynôme annulateur*

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Le polynôme P est appelé **polynôme annulateur** de u (resp. de M), si $P \neq 0$ et $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (resp. $P(M) = O_n$).

Exemple 2.1

Un polynôme annulateur de :

- p projecteur de E est :

- s symétrie vectorielle est :

- J_n la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 est :

- $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est :

Proposition 2.2

• Toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ admet un polynôme annulateur (de degré au plus n^2).

• En dimension finie, tout endomorphisme u admet un polynôme annulateur.

Exemple 2.2

L'endomorphisme $u : \begin{matrix} \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}[X] \\ Q \mapsto XQ \end{matrix}$ n'admet pas de polynôme annulateur.

Utilisation d'un polynôme annulateur

- ***Puissance d'endomorphisme ou de matrice*** :

  Si P est un polynôme annulateur de u ou de M, par division euclidienne de X^j par P, on peut calculer u^j ou M^j pour tout entier j.

- ***Inverse de matrice ou d'endomorphisme***

  Si P est un polynôme annulateur de u (resp. de M) tel que $P(0) \neq 0$ alors u (resp. M) est inversible et on peut exprimer u^{-1} (resp. M^{-1}) comme un polynôme en u (resp. M).

  Exemple avec la matrice M précédente pour le calcul de M^k et la recherche de M^{-1}.

3 Interpolation de Lagrange

3.1 Rappel : Déterminant de Vandermonde

Definition 3.1 *Déterminant de Vandermonde*

Pour $n \geqslant 2$,et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, on appelle déterminant de Vandermonde le déterminant suivant :

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Exemple 3.1

Justifier que si $P \in \mathbf{K}[X]$ est un polynôme de degré n et unitaire (de coefficient dominant égal à 1), alors

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} & P(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} & P(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & \lambda_{n+1} & \lambda_{n+1}^2 & \cdots & \lambda_{n+1}^{n-1} & P(\lambda_{n+1}) \end{vmatrix}$$

Que remarquez-vous pour $P = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$?

Proposition 3.1

Pour $n \geqslant 2$,et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$,

$$\boxed{V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)}$$

Exemple 3.2

Grâce à un déterminant de Vandermonde justifier que si $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ sont $n+1$ scalaires distincts alors

$$\forall (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbf{K}^{n+1} \quad \exists ! P \in \mathbf{K}_n[X] \text{ tel que } \forall i \in [\![0, n]\!] \quad P(\lambda_i) = z_i$$

3.2 Polynômes d'interpolation de Lagrange

Proposition 3.2

Si $a_0, \ldots, a_n$ sont n+1 scalaires 2 à 2 distincts, alors l'application $\varphi : P \mapsto (P(a_0), \ldots, P(a_n))$ est un isomorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$ dans $\mathbf{K}^{n+1}$.

Definition 3.2

Notons $(e_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbf{K}^{n+1}$.
Soit $a_0, \ldots, a_n$ n+1 scalaires distincts 2 à 2.

On appelle famille des polynômes interpolateur de Lagrange en ces n+1 points la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ de polynômes définis par

$$\forall i \in [\![0, n]\!] \quad L_i = \varphi^{-1}(e_i)$$

Proposition 3.3

Soit $a_0, \ldots, a_n$ n+1 scalaires distincts 2 à 2.
La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ des polynômes interpolateur de Lagrange en ces n+1 points est **une base** de $\mathbf{K}_n[X]$ et

$$\forall P \in \mathbf{K}_n[X] \quad P = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) L_k$$

En particulier $L_0 + L_1 + \ldots + L_n = 1$.

Remarque 3.1

Soit $a_0, \ldots, a_n$ n+1 scalaires distincts 2 à 2.

Le déterminant de Vandermonde $V(a_0, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$ est le déterminant de la matrice de passage de la base des polynômes interpolateurs de Lagrange vers la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$.

Remarque 3.2 *Expression explicite des polynômes d'interpolation de Lagrange*

Soit $a_0, \ldots, a_n$ n+1 scalaires distincts 2 à 2.

Par définition $\forall i \in [\![0, n]\!] \quad L_i(a_i) = 1$ et pour $j \neq i$ $L_i(a_j) = 0$, on en déduit que

$$\forall i \in [\![0, n]\!] \quad L_i = \prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

4 Produit d'espaces vectoriels et somme de sous-espaces vectoriels

4.1 Produit de p espaces vectoriels

On définit le produit cartésien de p $\mathbf{K}$-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_p$ par :

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p = \times_{i=1}^{p} E_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p), \forall i \in [\![1, p]\!], \qquad \}$$

$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ muni des lois ci-dessous, est alors un $\mathbf{K}$-espace vectoriel :

- $(x_1, \ldots, x_p) + (y_1, \ldots, y_p) = (\qquad , \ldots, \qquad)$
- $\lambda(x_1, \ldots, x_p) = (\qquad , \ldots, \qquad)$.
- L'élément neutre est $(\quad , \ldots\ldots, \quad)$.

Proposition 4.1

Si $E_1, \ldots, E_p$ sont des espaces vectoriels **de dimension finie** alors leur produit cartésien

$E_1 \times \cdots \times E_p$ est aussi de dimension finie et $\boxed{dim\,(E_1 \times \cdots \times E_p) = \qquad\qquad}$

Exemple 4.1

Dimension du $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{K}^n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

4.2 Somme et somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

On considère $F_1, F_2, \ldots, F_p$, p sous-espaces vectoriels de E.

Definition 4.1

1. La somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est l'ensemble :

$$\sum_{k=1}^{p} F_k = \left\{ \sum_{k=1}^{p} x_i, \quad (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p \right\}$$

2. La somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est **directe**, notée $\bigoplus_{k=1}^{p} F_k$, si la décomposition de tout vecteur $x \in \sum_{k=1}^{p} F_k$ sous la forme $\sum_{k=1}^{p} x_k$ est unique.
3. Si $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$, on dit que ces sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ sont supplémentaires dans E.

Proposition 4.2 *Caractérisation d'une somme directe*

La somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est une somme directe si et seulement si

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, \quad \left(\sum_{k=1}^{p} x_k = 0_E \Longrightarrow \forall k \in [\![1, p]\!] \quad x_k = 0_E \right)$$

Remarque 4.1

Si la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est directe, $\left(\sum_{k=1}^{p} F_k = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k \right)$, alors $\forall i \neq j \quad F_i \cap F_j = \{0_E\}$, mais attention **la réciproque est fausse**.

Remarque 4.2.1

On en déduit que si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ alors chaque F_i est un supplémentaire dans E de la somme des autres : $E = F_i \oplus \left(\bigoplus_{j \neq i} F_j \right)$.

On associe alors à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ la famille de projecteurs $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ où

p_i est la projection sur F_i dans la direction de $\bigoplus_{k=1, k \neq i}^{p} F_k$

Dans ce cas : $\sum_{i=1}^{p} p_i = Id_E \quad$ et $\quad \forall i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0_{\mathscr{L}(E)}$

Proposition 4.3 *Somme et dimension*

Si $F_1, \ldots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie, alors $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est de dimension finie

$$\boxed{\text{et } dim \left(\sum_{k=1}^{p} F_k \right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} dim(F_k)}$$

avec égalité si, et seulement si **la somme est directe.**

Exemple 4.2

Deux hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension 2 peuvent-ils être en somme directe ?

Remarque 4.2 *En dimension finie*

Si E est de dimension finie et $F_1, \ldots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E, alors

$$\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i \Longleftrightarrow dim(E) = \qquad\qquad \text{et } \sum_{i=1}^{p} F_i \text{ est une somme}}$$

Exemple 4.3

Soit $f : (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mapsto (2y - z, 3x - 2y, -2x + 2y + z)$.

Montrer que $\mathbf{R}^3 = Ker(f - Id_E) \oplus Ker(f - 2Id_E) \oplus Ker(f + 4Id_E)$.

Definition 4.2 *Base adaptée en dimension finie*

On suppose que E est de dimension finie égale à n.

- Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base d'un sous-espace vectoriel F de E.
  Toute base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E est appelée *base de E adaptée à F*.

- On suppose que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ et que $\forall i \in [\![1, p]\!]$ $\mathcal{B}_i$ est une base de F_i.

  La juxtaposition $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ est une base de E, appelée *base adaptée à la décomposition en somme directe de E*.

Remarque 4.3

On obtient une décomposition en somme directe d'un espace vectoriel E de dimension finie par **fractionnement** d'une base.

5 Matrices par blocs et sous-espaces vectoriels stables

5.1 Matrices par blocs

5.1.1 Ecriture d'une matrice par blocs

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Soient $i \in [\![2, n-1]\!]$ et $j \in [\![2, p-1]\!]$, on peut faire apparaître la ligne d'indice i et la colonne d'indice j :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,p} \\ & & & & & \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Notons $B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{i,j}(\mathbf{K})$, $\quad C = \begin{pmatrix} a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{i,p-j}(\mathbf{K})$,

$$D = \begin{pmatrix} a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-i,j}(\mathbf{K}) \text{ et } E = \begin{pmatrix} a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-i,p-j}(\mathbf{K})$$

On peut écrire la matrice A par blocs, de la façon suivante : $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$.

5.1.2 Opérations par blocs de tailles compatibles

Proposition 5.1 *Addition et multiplication par un scalaire ou une matrice*

Soient $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $A' = \begin{pmatrix} B' & C' \\ D' & E' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

Si les blocs sont de tailles compatibles, $A + \lambda A' = \begin{pmatrix} B + \lambda B' & C + \lambda C' \\ D + \lambda D' & E + \lambda E' \end{pmatrix}$.

Proposition 5.2 *Produit par blocs*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, on peut écrire $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cdots C_p \end{pmatrix}$.

   Si $B \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbf{K})$ alors $BA = \begin{pmatrix} BC_1 \cdots BC_p \end{pmatrix}$.

2. Soient $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $A' = \begin{pmatrix} B' & C' \\ D' & E' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbf{K})$.

   Si le produit BB' existe, alors $AA' = \begin{pmatrix} BB' + CD' & BC' + CE' \\ DB' + ED' & DC' + EE' \end{pmatrix}$

   Plus précisément, si le produit BB' existe, alors on peut effectuer tous les produits de la formule, et on a l'égalité.

   Un produit par blocs s'effectue comme si les blocs étaient des coefficients.

Proposition 5.3 *Transposition par blocs*

Si $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} {}^tB & {}^tD \\ {}^tC & {}^tE \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbf{K})$

Ainsi pour transposer une matrice écrite par blocs, on modifie l'ordre des blocs comme s'il s'agissait de coefficients et on les remplace par leur transposée.

Remarque : Les formules précédentes se généralisent au cas de matrices écrites avec un nombre de blocs supérieur à 4.
La formule du produit par blocs est la même que celle avec des coefficients, à condition que les tailles des blocs soient compatibles.

5.1.3 Cas d'une matrice carrée

Definition 5.1

1. Une matrice **triangulaire par blocs** est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ O & A_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & O & A_{pp} \end{pmatrix} \text{avec, pour tout } i \in [\![1,p]\!], \quad A_{ii} \text{ une matrice carrée.}$$

2. Une matrice **diagonale par blocs** est une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ O & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & A_{pp} \end{pmatrix} \text{avec, pour tout } i \in [\![1,p]\!], \quad A_{ii} \text{ une matrice carrée.}$$

Exemple 5.1

• Matrice d'un projecteur : $E = Im(p) \oplus Ker(p) = Ker(p - Id_E) \oplus Ker(p)$ dans une $\mathcal{B}$ base adaptée on a $M_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} & O \\ O & \end{pmatrix}$.

• Matrice d'une symétrie : $E = Ker(s - Id_E) \oplus Ker(s + Id_E)$ et dans une base $\mathcal{B}$ adaptée $M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} & O \\ O & \end{pmatrix}$.

Proposition 5.4 *Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs*

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{K})$, alors

$$det \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = det(A).det(C)$$

On peut généraliser :

Si $\forall i \in [\![1,p]\!] \quad A_i$ est une matrice carrée alors $det \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ O & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ O & \cdots & O & A_p \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{p} det(A_i)$.

5.2 Sous-espaces vectoriels stables

Dans tout ce paragraphe, u et v désignent des endomorphismes de l'espace vectoriel E.

Definition 5.2 *Sous-espace vectoriel stable, endomorphisme induit*

Soit F un sous-espace vectoriel de E et u un endomorphisme de E.

On dit que **F est stable par u** lorsque $u(F) \subset F$:

$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F$$

Dans ce cas, on appelle **endomorphisme induit par u sur F**, l'application $v \in \mathscr{L}(F)$ définie par :

$$\forall x \in F \quad v(x) = u(x)$$

Proposition 5.5 *Caractérisation de la stabilité d'un sous-espace*

On suppose ici que E est de dimension finie égale à n et que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

On note $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F, $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de G et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ la base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

On note aussi $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, et on écrit A par blocs : $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ avec $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$.

1. F est stable par u si et seulement si $A_3 =$

2. G est stable par u si et seulement si $A_2 =$

3. F et G sont stables par u si et seulement si A est

Remarque 5.1

On déduit de ce qui précède que si F est un sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à F, alors :

F est stable par u si et seulement si la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$, avec B la matrice de l'endomorphisme induit par u sur F.

Proposition 5.6 *Généralisation à une décomposition de E en somme directe*

On suppose que $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectorielssupplémentaires dans E et que E est de dimension finie. On note $n_i = dimF_i$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

$\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\quad F_i$ est stable par l'endomorphisme $u \iff A = \begin{pmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ O & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & A_{pp} \end{pmatrix}$ où A est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

De plus dans ce cas, pour tout i de $[\![1, p]\!]$ la matrice A_{ii} est la matrice de l'endomorphisme induit par u sur F_i.

Proposition 5.7

Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent alors le noyau de u est stable par v.
On en déduit que pour tout polynôme P, le noyau de $P(u)$ est stable par u.