Dans tout ce chapitre $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, f désigne un endomorphisme de E et M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Proposition 0.1 *Droite stable par un endomorphisme*

Une droite $D = Vect(x)$ est stable par l'endomorphisme f si, et seulement si,

Definition 1 *Diagonalisable en dimension finie*

- Lorsque E est de dimension finie, l'endomorphisme f est dit diagonalisable lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
- La matrice M est dite diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

Exemple 1

- On suppose qu'une matrice M est diagonalisable, expliquer comment obtenir facilement les puissances de M.
- On suppose que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Expliquer comment trouver les fonctions x, y, z dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que : $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$ et $\forall t \in \mathbf{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \end{array} \right.$.

  Montrer que A est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et trouver les fonctions x, y et z précédentes.

1 Eléments propres

Définitions

Definition 1.1 **Eléments propres d'un endomorphisme**

- On dit qu'un scalaire λ est une **valeur propre** de l'endomorphisme f lorsque l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$ n'est pas injectif, ce qui revient à $\boxed{\exists x \in E, \quad x \neq 0 \text{ et } f(x) = \lambda x}$
- Un vecteur x est appelé **vecteur propre** de f lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ vérifiant $\boxed{f(x) = \lambda x \text{ et } x \neq 0}$
- En dimension finie, l'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme f est appelé **spectre** de u, noté $\boxed{Sp(f).}$

- Si $\lambda \in Sp(f)$, alors $\boxed{Ker(f - \lambda Id_E)}$ est appelé **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ.
  Par définition ce sous-espace propre n'est pas réduit au vecteur nul et souvent noté $E_\lambda(f)$.

Remarque 1.1

- Un vecteur de E est un vecteur propre de l'endomorphisme f si et seulement si il engendre une droite stable par f.
- L'endomorphisme f est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de f. (que l'on prend alors comme définition lorsque E n'est pas de dimension finie mais admet des bases)
- Un vecteur propre est associé à une seule valeur propre.
- 0 est valeur propre de f si et seulement si f n'est pas injectif ($Ker(f) \neq \{0\}$).

Remarque 1.2 En dimension finie

Si E est de **dimension finie** alors

$$\boxed{\lambda \in Sp(f) \Longleftrightarrow Ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0\} \Longleftrightarrow f - \lambda Id_E \text{ est non inversible} \Longleftrightarrow det(f - \lambda Id_E) = 0}$$

Exemple 1.1

- Déterminer les éléments propres d'un projecteur, d'une symétrie.
- Déterminer les éléments propres de $\varphi : f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mapsto f''$.
- Déterminer les valeurs propres de $f : P \in \mathbf{R}[X] \mapsto XP$.

Definition 1.2 Eléments propres d'une matrice carrée

Les éléments propres (valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre) d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont ceux de l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à M (endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique est M).

Remarque 1.3

On identifie souvent $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et l'endomorphisme : $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{K}) \mapsto MX$.
Une valeur propre de M sera alors tout scalaire λ tel qu'il existe une matrice colonne $X \neq 0$ vérifiant $MX = \lambda X$. Ce qui revient à $det(\lambda I_n - M) = 0$.

En déduire les valeurs propres d'une matrice triangulaire.

Polynôme caractéristique

Dans ce paragraphe, E est supposé **de dimension finie** égale à n.

Definition 1.3 *Polynôme caractéristique*

- Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f, noté χ_f, est défini par :

$$\forall \lambda \in \mathbf{K} \quad \chi_f(\lambda) = det(\lambda Id_E - f)$$

- Le polynôme caractéristique de la matrice M, noté χ_M, est défini par :

$$\forall x \in \mathbf{K}, \quad \chi_M(x) = det(xI_n - M)$$

  où I_n est la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Remarque 1.4

- Une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique.
- Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Proposition 1.1

$$\boxed{\lambda \in Sp(f) \iff \chi_f(\lambda) = 0 \quad \text{de même} \quad \lambda \in Sp(M) \iff \chi_M(\lambda) = 0}$$

Les valeurs propres de M, ou celles de f, sont donc exactement les racines dans $\mathbf{K}$ de son polynôme caractéristique.

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on pourra alors distinguer le spectre réel $Sp_{\mathbf{R}}(M)$ et le spectre complexe $Sp_{\mathbf{C}}(M)$ de la matrice M.

Exemple 1.2

1. Déterminer le spectre complexe et le spectre réel de la matrice $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbf{R}$.
2. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors donner une expression de χ_A à l'aide de la trace et du déterminant de A.

Proposition 1.2 *Propriétés du polynôme caractéristique*

Soit χ_f le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f.

- χ_f est un polynôme unitaire de degré n.
- Le coefficient de X^{n-1} de χ_f est égal à $-tr(f)$.
- Le coefficient constant de χ_f est égal à $(-1)^n det(f)$.

En particulier lorsque $\chi_f = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ est **scindé sur $\mathbf{K}$ (ce qui est le cas lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$)**

$$\boxed{tr(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \qquad det(f) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k}$$

De même pour le polynôme caractéristique de la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Proposition 1.3 *Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit*

Si F est un sous-espace **stable par** f et si ω est l'endomorphisme induit par f sur F alors $\boxed{\chi_\omega \text{ divise } \chi_f.}$

Definition 1.4 *Ordre de multiplicité d'une valeur propre*

Soit $\lambda \in Sp(f)$ (resp. $\lambda \in Sp(M)$).
La valeur propre λ est d' **ordre de multiplicité p** lorsqu'elle est racine de χ_f (resp. χ_M) d'ordre de multiplicité p .

Exemple 1.3

Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ admet une valeur propre double.

Propriétés des sous-espaces propres

Proposition 1.4

Si f et g sont deux endomorphismes de E qui commutent alors tout sous-espace propre de f est stable par g.

Proposition 1.5 **Sous-espaces propres en somme directe**

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.

Remarque 1.5

On déduit de la propriété précédente que :

> Si $x_1, \ldots, x_p$ sont des vecteurs propres de f associés à des valeurs propres **distinctes deux à deux**
>
> alors $(x_1, \ldots, x_p)$ est une **famille libre**.

Proposition 1.6 *Multiplicité d'une valeur propre et dimension d'un sous-espace propre*

Si λ est une valeur propre de f **d'ordre de multiplicité** p alors

$$\boxed{1 \leqslant dimE_\lambda(u) = dimKer(u - \lambda Id_E) \leqslant p.}$$

En particulier le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est de dimension 1.

Valeurs propres et polynômes annulateurs

Remarque 1.6

Si $\lambda \in Sp(f)$ et si P est annulateur de f alors $P(\lambda) = 0$

Si on connait un polynôme annulateur de f alors il faut chercher les valeurs propres de f **parmi** les racines de P.

Proposition 1.7 **Théorème de Cayley-Hamilton** *(admis)*

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f de E (resp. d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$) est un polynôme annulateur de f (resp. de M) :

$$\boxed{\chi_f(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad \chi_M(M) = O_n}$$

On en déduit qu'en dimension n tout endomorphisme admet toujours un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à n.

2 Caractérisations de la diagonalisation en dimension finie

Dans ce chapitre E est toujours de dimension finie égale à n et f est un endomorphisme de E.

Proposition 2.1 **Endomorphismes diagonalisables**

L'endomorphisme f est **diagonalisable** si, et seulement si, l'une des propriétés ci-dessous est vérifiée :

- il existe une base de E formée de vecteurs propres de f,
- la somme des sous-espaces propres de f (*qui est directe*) est égale à E,
- la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à la dimension de l'espace E,
- le polynôme caractéristique de f est scindé sur le corps $\mathbf{K}$ et pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique,

- f admet $\prod_{\lambda \in Sp(f)} (X - \lambda)$ pour polynôme annulateur,
- f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

On adapte les résultats précédents au cas d'une matrice carrée

Remarque 2.1 **Cas particulier**

• Si χ_f (resp. χ_M), le polynôme caractéristique de f (resp. M), est scindé à racines simples alors f (resp. M) est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

• Si E est de dimension n et que f admet n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

• Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbf{K}$ alors M est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Remarque 2.2

Si f est un endomorphisme diagonalisable de E et si F est un sous-espace stable par f alors l'endomorphisme induit par f sur F est diagonalisable.

Etude pratique de la diagonalisation d'une matrice M

Pour M donnée dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

En général on calcule le polynôme caractéristique de M et on cherche ses racines (sauf si on connait déjà un polynôme annulateur de M).

- Si χ_M n'est pas scindé dans $\mathbf{K}[X]$ alors c'est terminé car M n'est pas diagonalisable.
- Si χ_M est scindé à racines simples alors c'est terminé, on sait que M est diagonalisable.
- Si χ_M est scindé mais pas à racines simples, on peut regarder si $(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$ est annulateur de M où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les racines distinctes de χ_M.
  Ou on cherche la dimension des sous-espaces propres $Ker(M - \lambda_i I_n)$ pour chaque valeur propre λ_i de M : on résout le système $MX = \lambda_i X$ (on ne doit pas trouver $X = 0$) ou on cherche le rang de $M - \lambda_i I_n$ et on applique le théorème du rang. On regarde ensuite si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.

Lorsque M est diagonalisable

Pour trouver $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que $M = P.D.P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres (non distinctes) de M. On cherche une base de chacun des sous-espaces propres. On recolle les différentes bases des sous-espaces propres et on obtient une base de vecteurs propres, ces vecteurs colonnes forment la matrice P, qui est une matrice de passage d'une base à une autre.

Exemple 2.1

- L'endomorphisme $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (x + y, 2x - y)$ est-il diagonalisable ?
- La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Déterminer A^k pour $k \in \mathbf{N}^*$.
- Pour quelles valeurs des réels a, b, c la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
- Trouver toutes les fonctions x et y dérivables sur $\mathbf{R}$ vérifiant $\forall t \in \mathbf{R}$ $\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 13x(t) - 9y(t) \\ y'(t) = 6x(t) - 8y(t) \end{array} \right.$ en écrivant ce système sous forme matricielle.

3 Trigonalisation

On se place toujours dans le cas où E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Definition 3.1 *Endomorphisme ou matrice triagonalisable*

1. Un endomorphisme est dit **trigonalisable** lorsqu'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

2. Une matrice carrée est dite **trigonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Proposition 3.1 *CNS de trigonalisabilité admise*

Un endomorphisme est **trigonalisable** si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps $\mathbf{K}$.

Remarque 3.1

On déduit du résultat précédent que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est trigonalisable.

Exemple 3.1

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ mais pas diagonalisable.

Montrer que A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. En déduire A^k pour $k \in \mathbf{N}^*$.