**Extrait de CNM PSI 2009**

Pour tout entier naturel $k$, $\mathcal{P}_k$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à $k$.

Dans ce problème $n$ désigne un entier naturel non nul et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels **deux à deux distincts** ; on note $\Pi$ le polynôme $\Pi = (X - x_0)(X - x_1) \cdots (X - x_n)$.

Pour tout entier naturel $m$, on définit l'application :

$$f_m : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_m & \to & \mathbf{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), \ldots, P(x_n)) \end{array}$$

# Partie I : Étude de l'application $f_m$

Soit $m$ un entier naturel.

1. Si $R \in \mathcal{P}_n$ vérifie $\forall i \in [\![0, n]\!] \quad R(x_i) = 0$, alors le polynôme $\Pi$ divise le polynôme $R$ : il existe donc $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $R = Q.\Pi$. Par égalité des degrés, puisque $deg(\Pi) = n + 1$ et $deg(R) \leqslant n$, on a $Q = 0 = R$.

   $$\boxed{\text{Le seul polynôme } R \in \mathcal{P}_n \text{ vérifiant } \forall i \in [\![0, n]\!] \quad R(x_i) = 0 \text{ est le polynôme nul.}}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et $P$ et $Q$ dans $\mathcal{P}_m$. On a :

   $$\begin{array}{rcl} f_m(\lambda P + Q) & = & (\lambda P(x_0) + Q(x_0), \ldots, \lambda P(x_n) + Q(x_n)) \\ & = & (\lambda P(x_0), \ldots, \lambda P(x_n)) + (Q(x_0), \ldots, Q(x_n)) \\ & = & \lambda\,(P(x_0), \ldots, P(x_n)) + (Q(x_0), \ldots, Q(x_n)) \\ f_m(\lambda P + Q) & = & \lambda f_m(P) + f_m(Q) \end{array}$$

   $$\boxed{f_m \text{ est donc une application linéaire.}}$$

3. Dans cette question, on suppose que $m \geqslant n + 1$.

   3.1. Par définition $Ker(f_m) = \{P \in \mathcal{P}_m, \quad f_m(P) = 0\}$.

   $$\begin{array}{rcl} P \in Ker(f_m) & \Longleftrightarrow & P \in \mathcal{P}_m \text{ et } \forall i \in [\![0, n]\!] \quad P(x_i) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & P \in \mathcal{P}_m \text{ et } \Pi \text{ divise le polynôme } P \\ & \Longleftrightarrow & P \in \mathcal{P}_m \text{ et } \exists Q \in \mathbf{R}[X] \quad P = Q.\Pi \\ & & \text{ et par égalité des degrés} \\ P \in Ker(f_m) & \Longleftrightarrow & \exists Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}, \quad P = Q.\Pi \end{array}$$

   $$\boxed{\text{On a donc } Ker(f_m) = \{Q.\Pi, \quad Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}.}$$

   3.2. $Ker(f_m)$ et $\mathcal{P}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{P}_m$.

   - D'après le résultat de la question 1., on sait que $Ker(f_m) \cap \mathcal{P}_n = \{0\}$.

• Soit $P \in \mathcal{P}_m$, d'après la division euclidienne de $P$ par $\Pi$, on sait qu'il existe un couple $(Q,R) \in \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X]$ tel que $P = Q.\Pi + R$ avec $deg(R) < deg(\Pi)$. Donc $deg(R) \leqslant n$ et par égalité des degrés $Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}$.

En notant $U = Q.\Pi$, on a $U \in Ker(f_m)$ et $P = U + R$ alors $P \in Ker(f_m) + \mathcal{P}_n$. On a donc $\mathcal{P}_m \subset Ker(f_m) + \mathcal{P}_n$.

Finalement on a obtenu : $\mathcal{P}_m = Ker(f_m) \oplus \mathcal{P}_n$.

$\boxed{Ker(f_m) \text{ et } \mathcal{P}_n \text{ sont bien supplémentiares dans } \mathcal{P}_m.}$

3.3. $\mathcal{P}_m = Ker(f_m) \oplus \mathcal{P}_n$ donc

$$dim\mathcal{P}_m = m + 1 = dimKer(f_m) + dim\mathcal{P}_n = dimKer(f_m) + n + 1$$

ce qui donne : $\boxed{Ker(f_m) \text{ est de dimension } m - n.}$

On avait $Ker(f_m) = \{Q.\Pi, \quad Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}$. $(1, X, \ldots, X^{m-n-1})$ est une base de $\mathcal{P}_{m-n-1}$, alors on obtient immédiatement que $(\Pi, X.\Pi, \ldots, X^{m-n-1}.\Pi)$ est une famille génératrice de $Ker(f_m)$. Cette famille contenant $m - n$ éléments de $Ker(f_m)$ qui est de dimension $m - n$, c'est une base de $Ker(f_m)$.

$\boxed{\text{Une base de } Ker(f_m) \text{ est } (\Pi, X\Pi, \ldots, X^{m-n-1}\Pi).}$

3.4. Par théorème du rang, on sait que :

$$dim\mathcal{P}_m = dimKer(f_m) + rg(f_m)$$

Ce qui donne $m + 1 = m - n - 1 + rg(f_m)$. $\boxed{f_m \text{ est de rang égal à } n + 1.}$

On sait que $Im(f_m)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{n+1}$ et

$$rg(f_m) = dimIm(f_m) = n + 1 = dim\mathbf{R}^{n+1}$$

alors $Im(f_m) = \mathbf{R}^{n+1}$ et $\boxed{f_m \text{ est surjective.}}$

4. Dans cette question, on suppose $m \leqslant n$.

4.1. Comme en première question, on montre que $\boxed{Ker(f_m) = \{0\}.}$

Par théorème du rang on a alors : $dim\mathcal{P}_m = m + 1 = 0 + rg(f_m)$.

$\boxed{f_m \text{ est donc de rang égal à } m + 1.}$

4.2. Lorsque $m \leqslant n$, on a $rg(f_m) = dimIm(f_m) = m+1$ et $dim\mathbf{R}^{n+1} = n+1$, or $Im(f_m)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{n+1}$ alors $\boxed{f_m \text{ est surjective si et seulement si } m = n.}$

# Partie II : Approximation polynômiale au sens des moindres carrés

On considère des réels $y_0, y_1, \ldots, y_n$ qui sont respectivemenbt les images des réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ par une fonction $\varphi$, et on cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathcal{P}_m$ tels que la quantité

$$\Phi_m(P) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P(x_i))^2$$

soit minimale, et à préciser la valeur minimale $\lambda_m$ de ladite quantité.

On parle alors d'approximation polynômiale au sens des moindres carrés de la fonction $\varphi$ aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ; ce type d'approximation est particulièrement utilisé dans les problèmes d'optimisation et de contrôle qualité.

## Partie A : Étude dans le cas $m \geqslant n+1$

5. 5.1. On a vu en question 3.4. que $f_m$ est surjective lorsque $m \geqslant n+1$. Pour $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ fixé dans $\mathbf{R}^{n+1}$, il existe donc $Q_0 \in \mathcal{P}_m$ tel que $f_m(Q_0) = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$.

   Notons $L_0, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés aux réels distincts $x_0, \ldots, x_n$ : $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad L_k = \displaystyle\prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}$.

   On rappelle que $\forall (k,i) \in [\![0,n]\!]^2 \quad L_k(x_i) = \delta_{i,k} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$.

   Considérons $\boxed{Q_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} y_k L_k}$, on a alors : $f_m(Q_0) = (Q_0(x_0), \ldots, Q_0(x_n)) = (y_0, \ldots, y_n)$

   et donc $\boxed{\Phi_m(Q_0) = 0.}$

   5.2. Par définition $\forall P \in \mathcal{P}_m \quad \Phi_m(P) \geqslant 0$ et on a vu : il existe $Q_0 \in \mathcal{P}_m$ tel que $\Phi_m(Q_0) = 0$

   donc $\boxed{\text{la valeur minimale } \lambda_m \text{ de } \Phi_m(P) \text{ lorsque } P \text{ décrit } \mathcal{P}_m\text{, est égale à } 0.}$

Par somme de réels positifs,

$$\begin{aligned}\lambda_m=\Phi_m(P)=0 &\iff \forall i\in[\![0,n]\!]\quad y_i-P(x_i)=0\\ &\iff \forall i\in[\![0,n]\!]\quad P(x_i)=Q_0(x_i)\\ &\iff f_m(P)=f_m(Q_0)\\ &\iff f_m(P-Q_0)=0\\ &\iff P-Q_0\in Ker(f_m)\\ \lambda_m=\Phi_m(P)=0 &\iff \exists U\in Ker(f_m),\quad P=Q_0+U\end{aligned}$$

L'ensemble des polynômes en lesquels la valeur minimale $\lambda_m = 0$ est atteinte est

$$\boxed{Q_0+Ker(f_m)=\{Q_0+U,\quad U\in Ker(f_m)\}.}$$

## Partie B : Étude dans le cas $m \leqslant n$

Dans cette section, on pose :

$$A=\begin{pmatrix}1 & x_0 & \cdots & x_0^m\\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^m\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1,m+1}(\mathbf{R}),\quad b=\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbf{R})$$

6. • Soit $M=(m_{i,j})$ et $N=(ni,j)$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R})$.
On note $M+N=(a_{i,j})$, $(M+N)^T=(b_{i,j})$, $M^T=(c_{i,j})$ et $N^T=(d_{i,j})$. Par définition

$\forall(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]\quad b_{i,j}=a_{j,i}=m_{j,i}+n_{j,i}=c_{i,j}+d_{i,j}$, alors $\boxed{(M+N)^T=M^T+N^T}$

• Soit $M_1\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ et $N_1\in\mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{R})$, on note $M_1=(m_{i,j})$, $N_1=(n_{i,j})$, $M_1N_1=(a_{i,j})$, $(M_1N_1)^T=(b_{i,j})$, $M_1^T=(c_i,j)$, $N_1^T=(d_{i,j})$. et $N_1^T.M_1^T=(e_{i,j})$.

On sait que $M_1N_1\in\mathcal{M}_{p,r}(\mathbf{R})$ donc $(M_1N_1)^T\in\mathcal{M}_{r,p}(\mathbf{R})$ et de même $N_1^T.M_1^T\in\mathcal{M}_{r,p}(\mathbf{R})$, avec par produit matriciel :

$$\forall(i,j)\in[\![1,r]\!]\times[\![1,p]\!]\quad b_{i,j}=a_{j,i}=\sum_{k=1}^{q}m_{j,k}.n_{k,i}=\sum_{k=1}^{q}c_{k,j}.d_{i,k}=\sum_{k=1}^{q}d_{i,k}.c_{k,j}=e_{i,j}$$

Donc $\boxed{(M_1N_1)^T=N_1^T.M_1^T}$

7. Soit $v=\begin{pmatrix}v_0\\ v_1\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbf{R})$ ; on lui associe le polynôme $P_v\in\mathcal{P}_m$ défini par
$P_v=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}v_kX^k.$

7.1. Par produit matriciel on a :

$$Av=\begin{pmatrix}v_0+v_1x_0+\cdots+v_mx_0^m\\ v_0+v_1x_1+\cdots+v_mx_1^m\\ \vdots\\ v_0+v_1x_n+\cdots+v_mx_n^m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_v(x_0)\\ P_v(x_1)\\ \vdots\\ P_v(x_n)\end{pmatrix}$$

7.2. On déduit de l'égalité précédente que si $Av = 0$ alors $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad P_v(x_k) = 0$.
Puisque $P_v$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $m$ avec $m \leqslant n$ et que $P_v$ admet $n+1$ racines distinctes, on sait que $P_v$ est le polynôme nul et donc tous ses coefficients sont nuls. ce qui donne : $\forall k \in [\![0, m]\!] \quad v_k = 0$ et donc $v = 0$.

$\boxed{\text{On a montré que si } Av = 0 \text{ alors } v = 0.}$

8. Soit $u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbf{R})$ ; par produit matriciel, en identifiant une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ avec son seul coefficient :

$$u^T.u = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_m \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{m} u_k^2$$

Par somme de réels positifs, on a immédiatement : $u^T.u \geqslant 0$ et que $u^T.u = 0$ si et seulement si $\forall k \in [\![0, m]\!] \quad u_k = 0$, ce qui revient à $u = 0$.

9.

9.1. Soit $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbf{R})$ tel que $A^T.A.v = 0$ ; on pose $u = Av$. On obtient alors :

$$u^T.u = (Av)^T.(Av) = v^T.A^T.A.v = v^T.0 = 0$$

On a donc $u^{\cdot}u = 0$, alors par le résultat de la question 8. on a $u = Av = 0$ et par la question 7.2. on a $v = 0$.
*Il y avait une erreur dans l'énoncé, il fallait comprendre : montrer que* $Av = 0$ *puis que* $v = 0$.

$\boxed{\text{On a donc obtenu : } A^T.A.v = 0 \Longrightarrow Av = 0 \Longrightarrow v = 0.}$

9.2. D'après ce qui précède : $\forall v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbf{R}), \quad A^T.A.v = 0 \Longrightarrow v = 0$.

$A^T.A \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbf{R})$, on peut considérer $\psi$ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^{m+1}$ canoniquement associé à $A^T.A$.
$\left(A^T.A.v = 0 \Longrightarrow v = 0\right)$ revient à $(\psi(x) = 0 \Longrightarrow x = 0)$ et donc $Ker(\psi) = \{0\}$. L'endomorphisme $\psi$ est injectif et $\mathbf{R}^{m+1}$ est de dimension finie donc $\psi$ est bijectif et donc

$\boxed{A^T.A \text{ est inversible.}}$

9.3. Notons $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]}$ et $A^T.A = (b_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant m}$, alors $a_{i,j} = x_i^j$ avec la convention $x_i^0 = 1$ et par produit matriciel on a :

$$\forall (i,j) \in [\![0, m]\!]^2 \quad b_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = \sum_{k=0}^{n} x_k^i x_k^j = \sum_{k=0}^{n} x_k^{i+j}$$

10. On pose $M = A^T.A$ et $c = A^T.b$ ; la matrice $M$ étant inversible (question 9.2.), on sait que le système linéaire $MZ = c$, d'inconnue $Z$, admet une unique solution qui est $\boxed{Z = M^{-1}.c}$

    *Dans la suite, cette solution se notera $\omega$, on lui associe le polynôme $P_\omega$ défini comme à la question 7. précédente.*

    On a donc $\omega = \left(A^T.A\right)^{-1}.c = \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix}$ et $P_\omega = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \omega_k X^k$.

11. Pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbf{R})$, on pose $g(v) = (b - Av)^T.(b - Av)$.

    11.1. Soit $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbf{R})$, par opération sur les matrices (transposition avec le résultat de la question 6. et la distributivité du produit matriciel sur la somme) :

$$\begin{aligned} g(v) &= = (b - Av)^T.(b - Av) \\ &= \left(b^T - (Av)^T\right).(b - Av) \\ &= (b^T - v^T.A^T).(b - A.v) \\ g(v) &= b^T.b - b^T Av - v^T.A^T.b + v^T.A^T.A.v \end{aligned}$$

    En prenant $v = \omega$, puisque $A^T.A.\omega = c = A^T.b$ il vient :

$$\begin{aligned} g(\omega) &= b^T.b - b^T A\omega - \omega^T.A^T.b + \omega^T.A^T.A.\omega \\ &= b^T.b - b^T.A.\omega - \omega^T.A^T.b + \omega^T.A^T.b \\ g(\omega) &= b^T.b - b^T.A.\omega \end{aligned}$$

    11.2. Soit $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbf{R})$, on a :

$$\begin{aligned} g(v) - g(\omega) &= b^T.b - b^T Av - v^T.A^T.b + v^T.A^T.A.v - b^T.b + b^T.A.\omega \\ &= b^T.A.\omega - b^T Av - v^T.A^T.b + v^T.A^T.A.v \\ &= (A^T.b)^T.\omega - (A^T.b)^T.v - v^T.A^T.b + v^T.A^T.A.v \\ &= (A^T.b)^T.(\omega - v) - v^T.A^T.b + v^T.A^T.A.v \\ &\phantom{=}\ \text{or } A^T.A.\omega = A^T.b \text{ donc} \\ g(v) - g(\omega) &= (A^T.A.\omega)^T.(\omega - v) - v^T.A^T.A.\omega + v^T.A^T.A.v \\ &= \omega^T.A^T.A.(\omega - v) - v^T.a^T.A(\omega - v) \\ &= (\omega^T - v^T).A^T.A.(\omega - v) \\ g(v) - g(\omega) &= (\omega - v)^T.A^T.A.(\omega - v) \end{aligned}$$

$$\boxed{g(v) - g(\omega) = (\omega - v)^T.A^T.A.(\omega - v)}$$

11.3. D'après l'égalité précédente, on a pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbf{R})$,

$$g(v)-g(\omega) = (\omega-v)^T.A^T.A.(\omega-v) = (A.(\omega-v))^T.A.(\omega-v) = u^T.u \text{ avec } u = A.(\omega-v)$$

Avec les résultats des questions 8. et 7., on en déduit que

$$\boxed{\forall v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbf{R}), \quad g(v)-g(\omega) \geqslant 0 \text{ et } g(v)-g(\omega)=0 \Longleftrightarrow A.(\omega-v)=0 \Longleftrightarrow \omega - v = 0.}$$

12. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathcal{P}_m$, on pose $V_P = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$. Comme fait en question 7., on a : $A.V_p = \begin{pmatrix} P(x_0) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix}$, donc $b - A.V_P = \begin{pmatrix} y_0 - P(x_0) \\ \vdots \\ y_n - P(x_n) \end{pmatrix}$. On en déduit (voir les calculs faits en question 8.) que $\boxed{g(V_p) = (b - A.V_p)^T.(b-A.V_p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (y_k - P(x_k))^2 = \Phi_m(P).}$

13.

13.1 Les résultats des questions 11. et 12. permettent de conclure directement que :

$$\boxed{\forall P \in \mathcal{P}_m, \quad \Phi_m(P) \geqslant \Phi_m(P_\omega) \text{ avec égalité si et seulement si } P = P_\omega.}$$

13.2. On déduit des résultats des questions 13.1 et 10. que $\lambda_m = \Phi_m(P_\omega)$ avec $\omega = \left(A^T.A\right)^{-1}.A^T.b$.

14. **Application :**
On prend $n = 3$, $m = 3$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 1$ et $y_3 = 0$.

14.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^1 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, donc

$$A^T.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 18 \\ 6 & 8 & 18 & 32 \\ 8 & 18 & 32 & 66 \end{pmatrix}$$

14.2. $A^T.b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

14.3. D'après les matrices obtenues précédemment on a, en posant $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ :

$$A^T.A.Z = A^T.b \Longleftrightarrow (S) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 4x & + & 2y & + & 6z & + & 8t & = & 4 \\ 2x & + & 6y & + & 8z & + & 18t & = & 0 \\ 6x & + & 8y & + & 18z & + & 32t & = & 2 \\ 8x & + & 18y & + & 32z & + & 66t & = & 0 \end{array} \right.$$

On s'implifie toutes les équations par 2, ce qui donne :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & 3z & + & 4t & = & 2 \\ x & + & 3y & + & 4z & + & 9t & = & 0 \\ 3x & + & 4y & + & 9z & + & 16t & = & 1 \\ 4x & + & 9y & + & 16z & + & 33t & = & 0 \end{array} \right.$$

On permute les équations $L_1$ et $L_2$ :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 3y & + & 4z & + & 9t & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & + & 4t & = & 2 \\ 3x & + & 4y & + & 9z & + & 16t & = & 1 \\ 4x & + & 9y & + & 16z & + & 33t & = & 0 \end{array} \right.$$

On effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1$ pour obtenir :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 3y & + & 4z & + & 9t & = & 0 \\ & - & 5y & - & 5z & - & 14t & = & 2 \\ & - & 5y & - & 3z & - & 11t & = & 1 \\ & - & 3y & & & - & 3t & = & 0 \end{array} \right.$$

On effectue $L_2 \leftrightarrow L_4$ puis $L_2 \leftarrow \dfrac{1}{3}L_2$, ce qui donne :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 3y & + & 4z & + & 9t & = & 0 \\ & - & y & & & - & t & = & 0 \\ & - & 5y & - & 3z & - & 11t & = & 1 \\ & - & 5y & - & 5z & - & 14t & = & 2 \end{array} \right.$$

On effectue les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2$ :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 3y & + & 4z & + & 9t & = & 0 \\ & - & y & & & + & t & = & 0 \\ & & & - & 3z & - & 6t & = & 1 \\ & & & - & 5z & - & 9t & = & 2 \end{array} \right.$$

On effectue enfin $L_4 \leftarrow L_4 - \dfrac{5}{3}L_3$ :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 3y & + & 4z & + & 9t & = & 0 \\ & - & y & & & + & t & = & 0 \\ & & & - & 3z & - & 6t & = & 1 \\ & & & & & & t & = & \dfrac{1}{3} \end{array} \right.$$

Le système linéaire $A^T.A.Z = A^T.b$, d'inconnue $Z$,admet donc l'unique solution :

$$\boxed{Z = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ qui correspond au vecteur colonne } \omega \text{ des questions 11 à 13.}}$$

14.4. D'après le résultat de la question 13.2. et 14.3., le polynôme $P_0$ de degré inférieur ou égal à 3 qui minimise $\Phi_3$ sur $\mathcal{P}_3$ est $P_\omega$, donc $\boxed{P_0 = 2 - \frac{1}{3}X - X^2 + \frac{1}{3}X^3.}$

Après calculs, on obtient : $P_0(x_0) = 1 = y_0$, $P_0(x_1) = 2 = y_1$, $P_0(x_2) = 1 = y_2$ et $P_0(x_3) = 0 = y_3$ alors $\boxed{\lambda_3 = \sum_{k=0}^{3}(y_k - P_0(x_k))^2 = 0.}$

*Remarque :*

Ici on est dans le cas $m = n = 3$, alors $f_m$ est surjective et injective (voir question 4.). Alors il existe un et un seul polynôme $P$ de $\mathcal{P}_3$ qui vérifie $f_m(P) = (y_0, \ldots, y_n)$ et alors $\Phi_m(P) = 0$. On en déduit que ce polynôme $P$ minimise $\Phi_m$ sur $\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_3$ et par les résultats de la question 13, on a $P = P_\omega = P_0$. Il est donc normal de trouver ici $\lambda_3 = \Phi_3(P_0) = 0$.

**Fin du corrigé**