Exercice 1

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $f : P \in \mathbf{R}_n[X] \mapsto P - P'$.

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Déterminer l'unique valeur propre de f ainsi que le sous-espace propre associé.
3. f est-il diagonalisable ?

Exercice 2

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ avec a, b, c des réels.

Déterminer $Sp_{\mathbf{R}}(M)$ et $Sp_{\mathbf{C}}(M)$.

Exercice 3

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad a_{ij} = i$. Déterminer les éléments propres de A.

Exercice 4

Si A est une matrice inversible et diagonalisable, étudier la diagonalisabilité de A^{-1}.

Exercice 5

Trouver tous les endomorphismes de $\mathbf{R}^n$ possédant une matrice diagonale dans toute base de $\mathbf{R}^n$.

Exercice 6

On considère deux endomorphisme u et v d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.
2. Est-ce toujours le cas si E n'est plus de dimension finie ?

Exercice 7

1. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ non constant et $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $P(M) = O_n$.
2. Soit a et b deux réels tels que $Q = X^2 + aX + b$ n'admette pas de racine réelle. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $Q(M) = O_2$.
3. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré $n \in \mathbf{N}^*$ et unitaire. Existe-t-il une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $P(M) = O_n$?

Exercice 8

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les éléments propres de A.
2. En déduire que A est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec D.
4. En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $Vect(I_2, A)$.

Exercice 9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{C})$ telles que $A = C.L$.
2. En déduire que $A^2 = tr(A)A$.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$. On considère $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto M + tr(M)A$.

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
2. Montrer que $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de f.
3. En déduire les valeurs propres de f.
4. f est-il diagonalisable ?

Exercice 11

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ à coefficients strictement positifs telle que $\forall i \in [\![1,n]\!], \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ (on dit que A est une matrice stochastique strictement positive).

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. En considérant un vecteur propre $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre 1 et $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_{i_0} = \underset{1 \leqslant j \leqslant n}{max}(x_j)$, montrer que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.
3. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A alors $|\lambda| \leqslant 1$.

Exercice 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Montrer qu'il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbf{R})$ telle que $M = Q.\begin{pmatrix} -A & O_n \\ O_n & 3A \end{pmatrix}.Q^{-1}$.
3. Exprimer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A.

Exercice 13

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $B^2 = A$.

1. Si A est diagonalisable et inversible, la matrice B est-elle diagonalisable ?
2. Si A est diagonalisable, la matrice B est-elle diagonalisable ?

Exercice 14

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont un polynôme annulateur est $X^2 + X + 4$.

1. Montrer que A n'a pas de valeur propre réelle.
2. Montrer que n est nécessairement pair.
3. Calculer le déterminant et la trace de A.

Exercice 15

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $B = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ A & O_n \end{pmatrix}$.

1. Trouver une relation entre le polynôme caractéristique de B et celui de A.
2. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que $\dim E_\lambda(B) = \dim E_{\lambda^2}(A)$.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

Exercice 16

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est trigonalisable mais pas diagonalisable.
2. Montrer que A est semblable à la matrice T.
3. Trouver toutes les fonctions x, y, z de classe C^∞ de ${}_r r$ dans $\mathbf{R}$ qui vérifient le système différentiel $\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2x(t) - y(t) - z(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) + y(t) - 2z(t) \\ z'(t) & = & 3x(t) - y(t) - 2z(t) \end{array} \right.$