*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

# *Problème I : Analyse*

Ce problème propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling.

## I Intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

**Q 1.** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

On étudie les fonctions $f$ et $g$ définies par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

**Q 2.** Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

**Q 3.** Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

**Q 4.** Montrer que $g$ est définie et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

**Q 5.** à l'aide d'un changement de variable affine, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2g'(x)g(x).$$

**Q 6.** Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2.$$

**Q 7.** En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$, puis conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

## II Formule de Stirling

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $\left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

***II.A*** – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

**Q 8.** Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

**Q 9.** Donner une relation entre $I_{n+1}$ et $I_n$, et en déduire que $I_n = n!$ pour tout entier naturel $n$.

***II.B*** – Cette sous-partie est consacrée à la démonstration de la formule de Stirling classique

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n. \tag{II.1}$$

**Q 10.** Si $n$ est un entier naturel non nul, déduire de la question précédente que

$$n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\,\mathrm{d}y.$$

On note $\mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\sqrt{n},+\infty[$ dont on rappelle qu'elle vaut 1 sur $[-\sqrt{n},+\infty[$ et 0 sur $]-\infty,-\sqrt{n}[$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $f_n(y) = \mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}(y)\left(1+\dfrac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}$.

**Q 11.** Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et, pour $y \in \mathbb{R}$, préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(y)$.

Pour $x \in ]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ on pose $q(x) = \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$.

**Q 12.** Justifier que $q$ est prolongeable en une fonction continue sur $]-1,+\infty[$ que l'on convient de noter également $q$.

**Q 13.** Démontrer que, pour tout $x > -1$, $q(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u$.

**Q 14.** En déduire que $q$ est une fonction décroissante sur $]-1,+\infty[$ et démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall y \in \mathbb{R}^+,\quad f_n(y) \leqslant (1+y)\mathrm{e}^{-y} \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{-*},\quad f_n(y) \leqslant \mathrm{e}^{-y^2/2}.$$

**Q 15.** Déduire des questions précédentes la formule de Stirling (II.1).

***II.C*** – Pour raffiner la formule de Stirling, on introduit les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!} \qquad v_n = \ln(u_n) \qquad w_n = v_{n+1} - v_n.$$

**Q 16.** Vérifier que $w_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de la série numérique $\sum w_n$.

**II.C.1)** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et la série numérique $\sum b_n$ converge.

**Q 17.** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul $n_0$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\quad (1-\varepsilon)b_n \leqslant a_n \leqslant (1+\varepsilon)b_n.$$

**Q 18.** En déduire que la série numérique $\sum a_n$ converge et que les restes vérifient $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

**II.C.2)** Si $n$ est un entier naturel non nul, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

**Q 19.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que $\dfrac{1}{(n+1)^2} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^2}$.

**Q 20.** En déduire un équivalent simple de $R_n$ lorsque $n \to +\infty$.

**II.C.3)**

**Q 21.** Déduire des questions précédentes un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ lorsque $n \to +\infty$.

**Q 22.** En déduire qu'il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{q_n}{n}\right).$$

# *Problème II : Algèbre linéaire*

Dans tout ce problème, l'entier $n$ est supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$) ; $E$ est un espace vectoriel complexe de dimension $n$.

**Définitions :**

Une application $u$ de $E$ dans lui-même est dite semi-linéaire si elle possède la propriété suivante :

Pour tout scalaire $a$ et tout couple de vecteurs $x$ et $y$ de l'espace vectoriel $E$ la relation ci-dessous est vérifiée :

$$u(ax+y) = \overline{a}u(x) + u(y).$$

Le nombre complexe $\overline{a}$ est le nombre complexe conjugué de $a$.

Un nombre complexe $\mu$ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire $u$ s'il existe un vecteur $x$ différent de 0 tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$u(x) = \mu x.$$

Le vecteur $x$ est un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre $\mu$.

**Objectif :**

Le but est d'étudier, pour une application semi-linéaire $u$ donnée, les valeurs et vecteurs co-propres.

## I Premières propriétés

Soit $u$ une application semi-linéaire de l'espace vectoriel $E$.

**Q 23.** Démontrer qu'étant donné un vecteur $x$ différent de 0, appartenant à l'espace $E$, il existe au plus un nombre complexe $\mu$ tel que la relation $u(x) = \mu x$ ait lieu.

**Q 24.** Démontrer que, si le nombre complexe $\mu$ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire $u$, pour tout réel $\theta$, le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore valeur co-propre de l'application semi-linéaire $u$. Exprimer un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$ en fonction d'un vecteur co-propre $x$ associé à la valeur co-propre $\mu$ et du réel $\theta$.

**Q 25.** Étant donnée une valeur co-propre $\mu$ de l'application semi-linéaire $u$, soit $E_\mu$ l'ensemble des vecteurs $x$ de l'espace vectoriel $E$ qui vérifient la relation $u(x) = \mu x$ :

$$E_\mu = \{x \in E \;/\; u(x) = \mu x\}.$$

Est-ce que l'ensemble $E_\mu$ est un espace vectoriel complexe ? réel ?

**Q 26.** Étant données deux applications semi-linéaires $u$ et $v$, étudier la linéarité de l'application composée $u \circ v$.

# II Matrice associée à une application semi-linéaire

Soit $u$ une application semi-linéaire de l'espace vectoriel $E$ ; soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de l'espace vectoriel $E$. À un vecteur $x$, de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, est associée une matrice-colonne $X$, d'éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$, appelée (abusivement) vecteur.

**Q 27.** Démontrer qu'à l'application semi-linéaire $u$ est associée dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $E$ une matrice $A$, carrée complexe d'ordre $n$, telle que la relation $y = u(x)$ s'écrive :

$$Y = A.\overline{X}.$$

La matrice-colonne $\overline{X}$ est la matrice complexe conjuguée de la matrice-colonne $X$.

**Q 28.** Soient $A$ et $B$ les matrices associées à une même application semi-linéaire $u$ dans les bases $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ respectivement. Soit $S$ la matrice de passage de la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ à la base $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$. Exprimer la matrice $B$ en fonction des matrices $A$ et $S$.

Étant donnée une matrice carrée $A$, complexe d'ordre $n$, le vecteur $X$, différent de 0, $(X \neq 0)$ est un vecteur co-propre de la matrice $A$, associé à la valeur co-propre $\mu$, si le vecteur $X$ et le nombre complexe $\mu$ vérifient la relation matricielle ci-dessous :

$$A.\overline{X} = \mu X.$$

Dans la suite toutes les matrices considérées sont des matrices carrées complexes.

# III Exemples :

**Q 29.** Soit $A$ la matrice d'ordre 2 définie par la relation suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Rechercher les valeurs co-propres $\mu$ et les vecteurs co-propres $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ associés.

**Q 30.** Démontrer que, si une matrice $A$ est réelle et admet une valeur propre réelle $\lambda$, cette matrice a au moins une valeur co-propre.

# IV Correspondance entre les valeurs co-propres de la matrice $A$ et les valeurs propres de la matrice $A.\overline{A}$ :

Soit $A$ une matrice carrée complexe d'ordre $n$.

**Q 31.** Démontrer que, si le scalaire $\mu$ est une valeur co-propre de la matrice $A$, le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $A.\overline{A}$.

**Q 32.** Soit $\lambda$ une valeur propre positive ou nulle $(\lambda \geq 0)$ de la matrice $A.\overline{A}$ et $X$ un vecteur propre associé :

$$A.\overline{A}.X = \lambda X.$$

Démontrer que le réel $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de la matrice $A$ en envisageant les deux cas suivants :

i. les vecteurs $A.\overline{X}$ et $X$ sont liés ;

ii. les vecteurs $A.\overline{X}$ et $X$ sont indépendants.

**Q 33.** En déduire que, pour que le réel positif ou nul $\mu$ soit valeur co-propre de la matrice $A$, il faut et il suffit que le réel $\mu^2$ soit valeur propre de la matrice $A.\overline{A}$.

**Q 34.** Étant donné un réel $m$, soit $A_m$ la matrice définie par la relation suivante :

$$A_m = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs co-propres réelles positives ; discuter suivant les valeurs du réel $m$.

# V Cas d'une matrice triangulaire supérieure :

Dans cette partie la matrice $A$ est une matrice triangulaire supérieure (les éléments situés en-dessous de la diagonale principale sont nuls).

**Q 35.** Démontrer que, si $\lambda$ est une valeur propre de la matrice $A$, pour tout réel $\theta$, le nombre complexe $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice $A$.

**Q 36.** Démontrer que, si $\mu$ est une valeur co-propre de la matrice $A$, il existe un réel $\theta$ tel que le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ soit valeur propre de la matrice $A$.

**Q 37.** Soit $A$ la matrice définie par la relation ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Démontrer que le réel 1 est valeur co-propre de cette matrice et déterminer un vecteur $X$ co-propre associé. Poser : $X = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$.

# VI Une caractérisation des valeurs co-propres :

Soit $A$ une matrice carrée complexe d'ordre $n$ ; soient $B$ et $C$ les matrices réelles définies par la relation suivante :

$$A = B + iC.$$

**Q 38.** Démontrer que le nombre complexe $\mu$ est valeur co-propre de la matrice $A$ si et seulement si le nombre réel $|\mu|$ est une valeur propre de la matrice $D$, carrée réelle d'ordre $2n$, définie par blocs par la relation suivante :

$$D = \begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix}.$$

• • • FIN • • •