Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème I : Analyse

Ce problème propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling.

I Intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Q 1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

On étudie les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Q 2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

Q 3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

Q 4. Montrer que g est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q 5. à l'aide d'un changement de variable affine, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2g'(x)g(x).$$

Q 6. Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2.$$

Q 7. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$, puis conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

II Formule de Stirling

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $\left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

II.A – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Q 8. Montrer que la suite $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Q 9. Donner une relation entre I_{n+1} et I_n, et en déduire que $I_n = n!$ pour tout entier naturel n.

II.B – Cette sous-partie est consacrée à la démonstration de la formule de Stirling classique

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n. \tag{II.1}$$

Q 10. Si n est un entier naturel non nul, déduire de la question précédente que

$$n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\,\mathrm{d}y.$$

On note $\mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\sqrt{n},+\infty[$ dont on rappelle qu'elle vaut 1 sur $[-\sqrt{n},+\infty[$ et 0 sur $]-\infty,-\sqrt{n}[$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $f_n(y) = \mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}(y)\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}$.

Q 11. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et, pour $y \in \mathbb{R}$, préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(y)$.

Pour $x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ on pose $q(x) = \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$.

Q 12. Justifier que q est prolongeable en une fonction continue sur $]-1,+\infty[$ que l'on convient de noter également q.

Q 13. Démontrer que, pour tout $x > -1$, $q(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u$.

Q 14. En déduire que q est une fonction décroissante sur $]-1,+\infty[$ et démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(y) \leqslant (1+y)\mathrm{e}^{-y} \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{-*}, \quad f_n(y) \leqslant \mathrm{e}^{-y^2/2}.$$

Q 15. Déduire des questions précédentes la formule de Stirling (II.1).

***II.C* –** Pour raffiner la formule de Stirling, on introduit les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!} \qquad v_n = \ln(u_n) \qquad w_n = v_{n+1} - v_n.$$

Q 16. Vérifier que $w_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de la série numérique $\sum w_n$.

II.C.1) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et la série numérique $\sum b_n$ converge.

Q 17. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad (1-\varepsilon)b_n \leqslant a_n \leqslant (1+\varepsilon)b_n.$$

Q 18. En déduire que la série numérique $\sum a_n$ converge et que les restes vérifient $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

II.C.2) Si n est un entier naturel non nul, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Q 19. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que $\dfrac{1}{(n+1)^2} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^2}$.

Q 20. En déduire un équivalent simple de R_n lorsque $n \to +\infty$.

II.C.3)

Q 21. Déduire des questions précédentes un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ lorsque $n \to +\infty$.

Q 22. En déduire qu'il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{q_n}{n}\right).$$

Problème II : Algèbre linéaire

Dans ce problème, n désigne un entier non nul fixé.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ (respectivement $\mathbb{R}$), $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note χ_M son polynôme caractéristique ($\forall x \in \mathbb{C} \quad \chi_M(x) = det(xI_n - M)$) et $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes. On pourra utiliser librement les produits matriciels par blocs.

Objectifs
On souhaite montrer que pour toute matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+$.

I Trois cas particuliers

Q 23. On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale.
Démontrer que $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}$ et que :

$$\det(I_n + C\overline{C}) \geq 1,$$

avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

Q 24. On se place dans le cas particulier où C est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que :

$$\det(I_n + C^2) \geq 1,$$

avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Q 25. Démontrer par récurrence sur n que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

Q 26. On suppose dans cette question que C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que, dans ce cas, on a :

$$\det(I_n + C^2) = |\det(C - iI_n)|^2.$$

En déduire que $\det(I_n + C^2) \in \mathbb{R}_+$ et que $\det(I_n + C^2) = 0$ si et seulement si $i \in \mathrm{Sp}(C)$.

II Le cas général

On considère dans cette partie une matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on va démontrer que $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+$.
Seule la **Q25** de la partie I sera utile pour la suite.

Q 27. En considérant le produit matriciel $\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix}$, démontrer que :

$$\det(I_n + C\overline{C}) = \det\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}$$

On notera désormais : $C_0 = \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}$

Q 28. Soient $(r,s,t,u) \in \mathbb{C}^4$ et (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. Exprimer la matrice de ϕ dans la base (e_2, e_1).

Q 29. Soit $(R,S,T,U) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^4$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que la matrice $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à la matrice $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$. Montrer de même que $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$.

Q 30. En déduire que le polynôme caractéristique de la matrice C_0 est à coefficients réels.

Pour la suite, nous écrirons les vecteurs de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ sous la forme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, où $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^2$.
On considère l'application $\Omega : \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}),\ \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix}.$$

Q 31. Démontrer les propriétés suivantes de l'application Ω :

31.1. Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, $C_0\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \Omega\left(C_0\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$;

32.2. $\Omega \circ \Omega = -\mathrm{id}_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$;

33.3. Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Omega\left(\lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \overline{\lambda}\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$

Q 32. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}$.
Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$ est libre et que le plan $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$ est stable par Ω.

Q 33. Soit E un sous-espace vectoriel de$\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ stable par Ω et soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus E$.
Montrer que :

$$E \cap \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right) = \{0_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}.$$

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on note $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique. On peut donc écrire : $\chi_{C_0} = \prod_{\lambda\, \mathrm{Sp}(C_0)} (X-\lambda)^{\alpha_\lambda}$. On note alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$:

$$F_\lambda = \ker\left((\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda}\right).$$

On admet, pour traiter la **Q36**, que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on a : $\dim F_\lambda = \alpha_\lambda$.

Q 34. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on a : $\Omega(F_\lambda) = F_{\overline{\lambda}}$.

Q 35. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0) \cap \mathbb{R}$, alors F_λ est de dimension paire.

Q 36. Conclure que : $\det(C_0) \in R_+$.

• • • FIN • • •