Extrait de EPITA 2008

Dans tout le problème $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et p est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbf{K}^p$ est identifié à la matrice-colonne de ses coordonnées dans la base canonique $(e_1, \dots, e_p)$ définie par :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On notera $e_1^T, \dots, e_p^T$ les p matrices-lignes transposées des matrices-colonnes précédentes.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ des matrices carrées à coefficients dans $\mathbf{K}$ est rapporté à sa base canonique $(E_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant p)$, E_{ij} désignant la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ dont les coefficients sont nuls à l'exception de celui situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, qui vaut 1.

Dans ce contexte, une matrice M de $_mathcalM_p(\mathbf{K})$ s'écrit donc :

$$M = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} m_{ij} E_{ij} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{p1} & m_{p2} & \cdots & m_{pp} \end{pmatrix}$$

1 Résultats préliminaires

1. Étant donnée une matrice $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij}$ et des entiers x et y compris entre 1 et p, expliciter les produits $E_{xy}A$ et AE_{xy}.

2. En déduire l'ensemble $C_p(\mathbf{K})$ des matrices $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ telles que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K}) \quad AM = MA$$

2 Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$

On considère dans cette partie une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ et on étudie l'application d_A qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ associe la matrice $d_A(M)$ de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ définie par :

$$d_A(M) = AM - MA$$

I - Propriétés générales de d_A

3. Montrer que d_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$.

4. L'endomorphisme d_A est-il injectif ? surjectif ? Dans quel cas est-il nul ?

5. Montrer que l'endomorphisme d_A vérifie la propriété :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbf{K}) \quad d_A(MN) = d_A(M)N + Md_A(N)$$

II - Étude de d_A lorsque A est diagonalisable

On suppose dans cette partie que la matrice A est diagonalisable.

6. Montrer que la matrice A^T transposée de A est diagonalisable.

7. Montrer que A et A^T ont les mêmes valeurs propres.

   On désigne alors par $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes ou non de A et A^T et par :
   — $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_p)$ une base de vecteurs propres de A associée à $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.
   — $\mathcal{W} = (W_1, \ldots, W_p)$ une base de vecteurs propres de A^T associée à $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

8. Calculer $d_A(V_i.W_j^T)$ en fonction de $V_i.W_j^T$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant p$.

   On note P et Q les matrices de passage de la base $(e_1, \ldots, e_p)$ à ces bases $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$, et on considère l'application φ définie de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ dans lui-même par $\varphi(M) = P.M.Q^T$.

9. Préciser les produits Pe_i et Qe_j pour $1 \leqslant i, j \leqslant p$.
   Comparer les matrices E_{ij} et $e_i.e_j^T$, et en déduire $\varphi(E_{ij})$.

10. Montrer que l'application φ réalise un automorphisme de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$.
    Que peut-on en déduire pour la famille $(V_i.W_j^T, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant p)$?

11. En déduire que d_A est diagonalisable, et préciser ses valeurs et vecteurs propres.