Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème I : Extrait de Centrale 2023 - PSI

Ce problème propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling.

I Intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Q 1. La fonction $h : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, de plus $e^t e^{-t^2} = e^{-t(t-1)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $h(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-t})$. Or on sait que $\forall \alpha > 0 \quad t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable en $+\infty$, donc par comparaison h est aussi intégrable en $+\infty$. Finalement h est intégrable sur $[0,+\infty[$. $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est donc absolument convergente.}}$

On pouvait aussi utiliser : par croissances comparées $h(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ *ou* $\forall t \in [1,+\infty[\quad 0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$.

On étudie les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Q 2. • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}$ est continue sur le segment $[0,1]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ existe, donc <u>la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$</u>.

• Pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(-x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)(-x)^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = f(x)$, donc <u>$f$ est paire</u>.

• $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. On a donc <u>$f(0) = \dfrac{\pi}{4}$</u>.

Q 3. Posons $h : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}$.

• Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $[0,1]$ d'après ce qui précède.

• Pour tout $t \in [0,1]$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-2x(1+t^2)e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2} = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$.

• Pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur le segment $[0,1]$.

• Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$, notons $c = max(|a|,|b|)$.

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in [0,1] \quad -(t^2+1)x^2 \leqslant 0 \text{ donc } \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = 2|x|e^{-(1+t^2)x^2} \leqslant 2|x| \leqslant 2c$$

La fonction $\varphi : t \mapsto 2c$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc est intégrable sur ce segment et vérifie $\forall (x;t) \in [a,b] \times [0,1] \quad \left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$.

Par théorème de dérivation sous le signe $\int$, on sait que f est de classe C^1 sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, donc est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec, d'après la formule de Leibniz :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -2x\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}\,\mathrm{d}t$$

Q 4. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction g est sa primitive qui s'annule en 0, alors g est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = e^{-x^2}$.

Q 5. On a d'après le résultat de la question 3 : pour $x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x\int_0^1 e^{-x^2-t^2x^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Par le changement de variable affine $t = \dfrac{u}{x} = \varphi(u)$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} e^{-t^2x^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -2x\int_0^x \varphi'(u)e^{-\varphi^2(u)x^2}\,\mathrm{d}u \\ &= -2xe^{-x^2}\int_0^x \frac{1}{x}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\ f'(x) &= -2g'(x)g(x) \end{aligned}$$

Pour $x = 0$, on a $f'(0) = 0$ et $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ donc $f'(0) = -2g'(0)g(0)$.

$$\boxed{\text{Finalement } \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -2g'(x)g(x)}$$

Q 6. Les fonctions f et g étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, l'égalité précédente entraine :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x -2g'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = -\left[g^2(t)\right]_0^x = g^2(0) - g^2(x)$$

Or $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$ et $g(0) = 0$ donc finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2.$$

Q 7. On reprend la fonction h définie dans la question 3.

- Pour $t \in [0,1]$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x,t) = 0$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ et $t \mapsto 0$ sont continues par morceaux sur le segment $[0,1]$.
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0,1] \quad |h(x,t)| = \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$.

Or la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc est intégrable sur $[0,1]$.

Par théorème de convergence dominée à paramètre continu, on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 h(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{x\to+\infty} h(x,t)\,\mathrm{d}t$, ce qui donne : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

• Par passage à la limite sur l'égalité $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - g^2(x)$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} g^2(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

Or pour $x > 0$, $g(x) > 0$ puisque la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\forall x > 0 \quad g(x) = \sqrt{g^2(x)}$ et par continuité de la fonction racine carrée sur R^+, on a : $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

Ce qui revient à écrire

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

II Formule de Stirling

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $\left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

II.A – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Q 8. Pour $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Par croissances comparées $t^n e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ qui est intégrable en $+\infty$ d'après les intégrales de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, alors la fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc <u>la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie</u>.

Q 9. • Pour $n \in \mathbb{N}$, $u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, avec par croissances comparées $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$.

Par intégration par parties, puisque l'intégrale $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ converge on a :

$$I_{n+1} = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Or $u(0) = 0$ donc il reste $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} (n+1)t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$. $\underline{\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} = (n+1)I_n}$.

• $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!$.
Soit n tel que $I_n = n!$ alors $I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)!$.

On a donc montré par récurrence : $\underline{\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = n!}$.

II.B – Cette sous-partie est consacrée à la démonstration de la formule de Stirling classique

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n. \tag{II.1}$$

Q 10. Soit n est un entier naturel non nul, on effectue le changement de variable affine $t = \varphi(y) = n + y\sqrt{n}$ sur l'intégrale convergente I_n, la fonction φ étant une bijection strictement croissante de $[-\sqrt{n}, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ de classe C^1, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \varphi'(y)\varphi^n(y)e^{-\varphi(y)}\,\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(n + y\sqrt{n}y\right)^n e^{-n-y\sqrt{n}}\,\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} n^n\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-n}e^{-y\sqrt{n}}\,\mathrm{d}y \\ I_n &= \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}}\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Et en utilisant $I_n = n!$, on obtient $\boxed{n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \int\limits_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\,\mathrm{d}y.}$

On note $\mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\sqrt{n}, +\infty[$ dont on rappelle qu'elle vaut 1 sur $[-\sqrt{n}, +\infty[$ et 0 sur $]-\infty, -\sqrt{n}[$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $f_n(y) = \mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}(y)\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}$.

Q 11. $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$, alors pour y fixé dans $\mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad y \in [-\sqrt{n}, +\infty[$ et donc

$$f_n(y) = \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} = e^{-y\sqrt{n}}.\exp\left(n\ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{y}{\sqrt{n}} = 0$, donc $\ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} y\sqrt{n} - \frac{y^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, on en déduit que

$$f_n(y) \underset{n\to+\infty}{=} e^{-y\sqrt{n}}.\exp\left(y\sqrt{n} - \frac{y^2}{2} + o(1)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-\frac{y^2}{2} + o(1)\right)$$

Ce qui entraine $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(y) = e^{-y^2/2}.}$

La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $y \mapsto e^{-y^2/2}$.

Pour $x \in]-1, +\infty[\setminus\{0\}$ on pose $q(x) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

Q 12. La fonction q est continue sur $]-1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ par quotient de fonctions continues sur $]-1, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule qu'en 0.

On a rappelé que $\ln(1+x) \underset{x\to0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, alors $q(x) \underset{x\to0}{)=} \frac{1}{2} + o(1)$.

La fonction q se prolonge donc par continuité en 0 en posant $q(0) = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{q \text{ se prolonge en une fonction continue sur }]-1,+\infty[\text{ en posant } \forall x \in]-1,+\infty[\quad q(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

Q 13. • Pour $x=0$, on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} = q(0)$.

• Pour $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, $u \mapsto \dfrac{u}{1+ux}$ est continue sur le segment $[0,1]$, et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{ux}{1+ux}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{(ux+1)-1}{1+ux}\,\mathrm{d}u \\
&\quad \text{et par linéarité} \\
&= \frac{1}{x}\int_0^1 \mathrm{d}u - \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{1}{1+ux}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\left[\frac{\ln(1+ux)}{x}\right]_0^1 \\
\int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} = \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}
\end{aligned}$$

On a donc $\forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u = q(x)$.

$$\boxed{\text{Finalement pour tout } x > -1,\ q(x) = \int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u.}$$

Q 14. Soit x et y dans $]-1,+\infty[$ tels que $x<y$.

$$u \in [0,1] \quad \Longrightarrow 0 < 1+xu \leqslant 1+uy \Longrightarrow \frac{1}{1+yu} \leqslant \frac{1}{1+xu} \Longrightarrow \frac{u}{1+yu} \leqslant \frac{u}{1+xu}$$

et par intégration sur le segment $[0,1]$, on obtient : $x<y \Longrightarrow q(y) \leqslant q(x)$.

<u>q est une fonction décroissante sur $]-1,+\infty[$.</u>

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $y \in [-\sqrt{n},+\infty[$ alors

$$\begin{aligned}
f_n(y) &= \left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}} \\
&= \exp\left(-y\sqrt{n} + n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= \exp\left(-n\left(\frac{y}{\sqrt{n}} - \ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
f_n(y) &= \exp\left(-y^2 q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)
\end{aligned}$$

• Si $y \in \mathbb{R}^+$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad y \in]-\sqrt{n},+\infty[$ et $-1 < \dfrac{y}{\sqrt{n}} \leqslant y$. Puisque q est décroissante sur $]-1,+\infty[$, on a : $q\left(\dfrac{y}{\sqrt{n}}\right) \geqslant q(y)$ donc $-y^2 q\left(\dfrac{y}{\sqrt{n}}\right) \leqslant -y^2 q(y)$, et finalement $f_n(y) \leqslant \exp(-y^2 q(y))$. Or $-y^2 q(y) = -y + \ln(1+y)$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall y \in \mathbb{R}^+ \quad f_n(y) \leqslant (1+y)e^{-y}.}$

• Soit $y \in \mathbb{R}^{-*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $y \in]-\infty, -\sqrt{n}]$ alors $f_n(y) = 0$ et donc $f_n(y) \leqslant e^{-y^2/2}$.

- Si $y \in]-\sqrt{n}, +\infty[$, alors $-1 < \dfrac{y}{\sqrt{n}} < 0$ et par décroissance de q, on a $q\left(\dfrac{y}{\sqrt{n}}\right) \geqslant q(0)$ donc $-y^2 q\left(\dfrac{y}{\sqrt{n}}\right) \leqslant -y^2 q(0)$, et donc $f_n(y) \leqslant e^{-y^2/2}$.

$\boxed{\text{Finalement } \forall y \in \mathbb{R}^{-*} \quad f_n(y) \leqslant e^{-y^2/2}.}$

Q 15. On peut écrire $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) \, \mathrm{d}y.$

• On sait que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $y \mapsto e^{-y^2/2}$.

• $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$ ainsi que la fonction $y \mapsto e^{-y^2/2}$.

• Soit $\varphi : y \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} (1+y)e^{-y} & \text{si } y \geqslant 0 \\ e^{-y^2/2} & \text{si } y < 0 \end{cases}$.

φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, par croissances comparées $\varphi(y) \underset{y \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$, donc φ est intégrable en $+\infty$.
De même $\varphi(y) \underset{y \to -\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$, et par parité la fonction $y \mapsto \dfrac{1}{y^2}$ est intégrable en $-\infty$, donc φ est intégrable en $-\infty$. Finalement φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

De plus on a vu en question 14 : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad 0 \leqslant f_n(y) \leqslant \varphi(y)$.

Par théorème de convergence dominée, on sait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(y) \, \mathrm{d}y$, ce qui donne :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} \, \mathrm{d}y$$

Et par le changement de variable linéaire $y = t\sqrt{2}$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

Par parité de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$, et par le résultat de la question 7, il vient

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} \, \mathrm{d}y = 2\sqrt{2} \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$$

En utilisant l'égalité de la question 10 : $n! = \sqrt{n} \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}} \, \mathrm{d}y$, on obtient $\boxed{n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$

II.C – Pour raffiner la formule de Stirling, on introduit les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \frac{n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}}{n!} \qquad v_n = \ln(u_n) \qquad w_n = v_{n+1} - v_n.$$

Q 16. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ donc $v_n = \ln(u_n)$ existe et $w_n = v_{n+1} - v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}e^{-n-1}\sqrt{n+1}n!}{(n+1)!n^n e^{-n}\sqrt{n}} = e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

On en déduit que

$$w_n = -1 + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

On sait que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ pour $x \to 0$, donc

$$\begin{aligned}
w_n &\underset{n\to+\infty}{=} -1 + n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -1 + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
w_n &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

D'après l'égalité précédente, on peut écrire $w_n = \frac{1}{12n^2} + t_n$ avec $t_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La série de Riemann à termes positifs $\sum \frac{1}{n^2}$ converge $(2 > 1)$, alors par comparaison la série $\sum t_n$ converge absolument et par somme la série la série $\sum w_n$ converge.

II.C.1) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et la série numérique $\sum b_n$ converge.

Q 17. $a_n \sim b_n$ avec $b_n > 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, et par définition pour $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel non nul n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$$

Ce qui donne successivement puisque $b_n > 0$:

$$\forall n \geqslant n_0, \quad -\varepsilon \leqslant \frac{a_n}{b_n} - 1 \leqslant \varepsilon$$

$$\forall n \geqslant n_0, \quad -\varepsilon b_n \leqslant a_n - b_n \leqslant \varepsilon b_n$$

Et finalement $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geqslant n_0, \quad (1-\varepsilon)b_n \leqslant a_n \leqslant (1+\varepsilon)b_n$.

Q 18. D'après ce qui précède (en prenant $\varepsilon = 1$) : $\exists n_1 \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \geqslant n_1 \Longrightarrow 0 \leqslant a_n \leqslant 2b_n$ alors par comparaison puisque la série $\sum b_n$ converge, on obtient la convergence de la série à termes positifs $\sum a_n$.

De plus on a vu : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \geqslant n_0 \quad (1-\varepsilon)b_k \leqslant a_k \leqslant (1+\varepsilon)b_k$, alors par somme

$$\forall N > n \geqslant n_0, \quad (1+\varepsilon)\sum_{k=n}^{N} b_k \leqslant \sum_{k=n}^{N} a_k \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{k=n}^{N} b_n$$

et par passage à la limite quand $N \to +\infty$ (puisqu'il y a convergence), on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geqslant n_0 \quad (1+\varepsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} b_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} a_n \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} b_k$$

Or $\sum_{k=n}^{+\infty} b_k > 0$ puisque $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n > 0$, donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geqslant n_0 \quad 1+\varepsilon \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} a_n}{\sum_{k=n}^{+\infty} b_k} \leqslant 1+\varepsilon$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \left| \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} a_n}{\sum_{k=n}^{+\infty} b_k} - 1 \right| \leqslant \varepsilon$$

et on retrouve la définition de $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} a_k}{\sum_{k=n}^{+\infty} b_k} = 1$. On a donc : $\underline{\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k}$.

II.C.2) Si n est un entier naturel non nul, on pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Q 19. Par décroissance de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur $]0,+\infty[$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [n, n+1] \quad \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

et par intégration sur le segment $[n, n+1]$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Q 20. D'après l'encadrement précédent, on a par relation de Chasles : pour $N > n > 0$

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_n^{N+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2}$$

Puis par passage à la limite quand $N \to +\infty$, puisque R_n et $\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

ce qui donne : $R_n - \frac{1}{n^2} \leqslant \left[-\frac{1}{t}\right]_n^{+\infty} \leqslant R_n$, et donc

$$\frac{1}{n} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit l' équivalent } R_n \sim \frac{1}{n} \text{ lorsque } n \to +\infty.}$$

II.C.3)

Q 21. En question 16 on a vu la convergence de la série à termes positifs $\sum w_n$, avec $w_n \sim \dfrac{1}{12n^2}$, la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge et est à termes strictement positifs, alors par le résultat des questions 18 et 20, on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \sim \frac{1}{12} R_n \sim \frac{1}{12n} \text{ quand } n \to +\infty$$

Q 22. Par la question 16 et par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} w_k = \lim_{k\to+\infty} v_k - v_n \sim \frac{1}{12n}$.

Par définition $v_n = \ln(u_n)$ avec $u_n = \dfrac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ et par question 15 $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, donc $-\ln(\sqrt{2\pi}) - \ln(u_n) \sim \dfrac{1}{12n}$ ou encore

$$\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Or $u_n = \dfrac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!}$, donc

$$\sqrt{2\pi}\frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!} \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Ce qui donne :

$$n! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\sqrt{2\pi} n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}\right) . \exp\left(\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$n! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\sqrt{2\pi} n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}\right)\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

On rappelle que pour une suite (a_n), $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right) \iff \exists (b_n)$ de limite nulle telle que $a_n = \dfrac{b_n}{n}$, donc il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

Problème II : Extrait de CCINP PSI 2021

Dans ce problème, n désigne un entier non nul fixé.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ (respectivement $\mathbb{R}$), $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\bar{M}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont les conjugués de ceux de M, χ_M le polynôme caractéristiquede M ($\forall x \in \mathbb{C} \quad \chi_M(x) = det(xI_n - M)$) et $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de M. On pourra utiliser librement les produits matriciels par blocs.

Objectifs
On souhaite montrer que pour toute matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+$.

I Trois cas particuliers

Q 23. On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale.

On peut écrire $C = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & z_n \end{pmatrix}$ avec $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, alors $\bar{C} = \begin{pmatrix} \overline{z_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \overline{z_n} \end{pmatrix}$. Par produit de matrices diagonales, on sait que $C.\bar{C} = \begin{pmatrix} z_1\overline{z_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & z_n\overline{z_n} \end{pmatrix}$ et

$I_n + C\bar{C} = \begin{pmatrix} 1+|z_1|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1+|z_n|^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\boxed{\det(I_n + C\bar{C}) \in \mathbb{R}.}$

Par déterminant d'une matrice diagonale on sait que $\det(I_n + C\overline{C}) = \prod_{k=1}^{n}(1 + |z_k|^2)$.

$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad 1 + |z_k|^2 \geqslant 1$ alors $\det(I_n + C\bar{C}) \geqslant 1$ avec égalité si, et seulement si, $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad 1 + |z_k|^2 = 1$.
On peut revenir à la somme d'une somme de termes positifs en prenant la fonction ln *et utiliser qu'une somme de réels positifs est nulle SSI chaque terme de la somme est nul.*

Ce qui donne donc $det(I_n + C\bar{C}) = 1 \iff \forall k \in [\![1n]\!] \quad |z_k|^2 = 0 \iff \forall k \in [\![1, n]\!] \quad z_k = 0$. Et donc

$$\boxed{\det(I_n + C\bar{C}) \geq 1, \text{ avec égalité si et seulement si } C = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}.}$$

Q 24. On se place dans le cas particulier où C est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $C = P.D.P^{-1}$, alors

$$C^2 = (P.D.P^{-1}).(P.D.P^{-1}) = P.D^2.P^{-1}$$

et on peut écrire

$$I_n + C^2 = P.I_n.P^{-1} + P.D^2.P^{-1} = P.(I_n + D^2).P^{-1}$$

donc

$$\det(I_n + C^2) = \det(P).\det(I_n + D^2).\det(P^{-1}) = \frac{\det(P)}{\det(P)}\det(I_n + D^2) = \det(I_n + D^2)$$

Puisque $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire $D^2 = D.\bar{D}$ et d'après le résultat de la question précédente :

$$\det(I_n + C^2) \geqslant 1 \text{ avec égalité si et seulement si } D = 0$$

ce qui donne finalement $\boxed{\det(I_n + C^2) \geqslant 1, \text{ avec égalité si et seulement si } C = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.}$

Q 25. • Si $n = 1$ alors pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $A = (a)$ et $\bar{A} = (\bar{a})$, on a donc $\det(\bar{A}) = \bar{a} = \overline{\det(A)}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$, on note $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$, alors $\bar{A} = (\overline{a_{i,j}})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$.
Par développement par rapport à la dernière colonne de $\bar{A}$, on a :

$$\det(\bar{A}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+n+1} \overline{a_{i,n+1}} \det(\overline{A}_{i,n+1})$$

en notant $\overline{A}_{i,n+1}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ obtenue à partir de $\bar{A}$ en supprimant sa ligne i et sa colonne $n+1$, et $A_{i,n+1}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ obtenue à partir de A en supprimant sa ligne i et sa colonne $n+1$, on a $\bar{A}_{i,n+1} = \overline{A_{i,n+1}}$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à ces matrices $A_{i,n+1}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \det(\bar{A}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+n+1} \overline{a_{i,n+1}} \det(\overline{A_{i,n+1}}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+n+1} \overline{a_{i,n+1}}.\overline{\det(A_{i,n+1})} \\ & \quad \text{et par propriété sur les conjués} \\ &= \overline{\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+n+1} a_{i,n+1} \det(A_{i,n+1})} \\ \det(\bar{A}) &= \overline{\det(A)} \end{aligned}$$

On a donc montré par réciurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \text{ et toute matrice } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \text{ on a } \det(\bar{A}) = \overline{\det(A)}.}$

Q 26. On suppose dans cette question que C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On remarque que $I_n + C^2 = (I_n - iC).(I_n + iC)$ et puisque I_n et C sont à coefficients réels on peut écrire $I_n + C^2 = (I_n - iC).(\overline{I_n - iC})$, donc par application du résultat de la question précédente :

$$\det(I_n + C^2) = \det(I_n - iC).\det(\overline{I_n - iC}) = \det(I_n - iC).\overline{\det(I_n - iC)} = |\det(C - iI_n)|^2.$$

On en déduit immédiatement que $\boxed{\det(I_n + C^2) \in \mathbb{R}_+}$ et

$$\det(I_n + C^2) = 0 \iff |\det(C - iI_n)| = 0 \iff \det(C - iI_n) = 0 \iff i \in \mathrm{Sp}(C)$$

On a donc $\boxed{\det(I_n + C^2) = 0 \text{ si et seulement si } i \in \mathrm{Sp}(C).}$

II Le cas général

On considère dans cette partie une matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on va démontrer que $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+$.
Seule la **Q25** de la partie I sera utile pour la suite.

Q 27. Par produit de matrices par blocs, on obtient $\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n + C\bar{C} & -C \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$, alors par déterminant d'un produit de matrices carrées

$$\det \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix} . \det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_n + C\bar{C} & -C \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

et par déterminants de matrices triangulaires par blocs :

$$\det(I_n).\det(I_n).\det\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix} = \det(I_n + C.\bar{C}).\det(I_n)$$

ce qui donne $\boxed{\det(I_n + C\overline{C}) = \det\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}}$

On notera désormais : $C_0 = \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}$

Q 28. Soient $(r, s, t, u) \in \mathbb{C}^4$ et (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$, ce qui signifie que $\phi(e_1) = re_1 + te_2$ et $\phi(e_2) = se_1 + ue_2$. On peut encore écrire :

$$\phi(e_2) = ue_2 + se_1 \qquad \phi(e_1) = te_2 + re_1$$

Alors $\boxed{\text{la matrice de } \phi \text{ dans la base } (e_2, e_1) \text{ est par définition } \begin{pmatrix} u & t \\ s & r \end{pmatrix}.}$

Q 29. Soit $(R, S, T, U) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^4$. Notons ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{2n}$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. En s'inspirant de la question précédente, on considère $\mathcal{B}_1 = (e_{n+1}, \ldots, e_{2n}, e_1, \ldots, e_n)$ (pour respecter les blocs U et R). La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$ est $P = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$, on sait alors que la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}_1$ est $P^{-1}.\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}.P$ et P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}$, ce qui donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix} = P$.

$$P^{-1}.\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}.P = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} S & R \\ U & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$$

On a obtenu que $\boxed{\text{la matrice } \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} \text{ est semblable dans } \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}) \text{ à la matrice } \begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}.}$

Prenons maintenant la base $\mathcal{B}_2 = (e_1, \ldots, e_n, -e_{n+1}, \ldots, -e_{2n})$ de $\mathbb{C}^n$ alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_2$ est $Q = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & -I_n \end{pmatrix}$ de matrice inverse $Q^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & -I_n \end{pmatrix} = Q$. On a alors :

$$Q^{-1}.\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}.Q = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & -I_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} R & -S \\ T & -U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{La matrice } \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} \text{ est donc semblable à la matrice } \begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}.}$$

Q 30. Rappelons que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, en effet soit A et B deux matrices semblables, alors il existe P inversible telle que $A = P.B.P^{-1}$, on aura donc

$$\forall x \in \mathbb{C} \quad \chi_A(x) = \det(xI_q - A) = \det(xI_q - P.B.P^{-1}) = \det(P.(xI_q - B).P^{-1}) = \det(P).\det(xI_q - B).\det(P^{-1}) = \det(xI_q - B)$$

Pour montrer que χ_C le polynôme caractéristique de la matrice C_0 est à coefficients réels, on va vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \chi_{C_0}(x) = \overline{\chi_{C_0}(x)}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\overline{\chi_{C_0}(x)} &= \det(\overline{xI_{2n} - C_0}) \\
&= \det(xI_{2n} - \overline{C_0}) \\
&= \det\begin{pmatrix} (x-1)I_n & \overline{C} \\ -C & (x-1)I_n \end{pmatrix} \\
& \qquad \text{et par matrices semblables et question 29.} \\
&= \det\begin{pmatrix} (x-1)I_n & -C \\ \overline{C} & (x-1)I_n \end{pmatrix} \\
& \qquad \text{encore par la question 29} \\
&= \det\begin{pmatrix} (x-1)I_n & C \\ -\overline{C} & (x-1)I_n \end{pmatrix} \\
&= \det(xI_n - C_0) \\
\overline{\chi_{C_0}(x)} &= \chi_{C_0}(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le polynôme caractéristique de } C_0 \text{ est donc à coeffciients réels.}}$$

Pour la suite, nous écrirons les vecteurs de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ sous la forme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, où $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^2$.
On considère l'application $\Omega : \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}),\ \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix}.$$

Q 31. Par calculs directs sur les matrices par blocs, on obtient les propriétés suivantes de l'application Ω :

31.1. Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, $C_0\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\overline{Y} - C\overline{X} \\ -\overline{C}\overline{Y} + \overline{X} \end{pmatrix} = \Omega\left(C_0\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$;

32.2. $(\Omega \circ \Omega)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \Omega\begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ donc $\Omega \circ \Omega = -\mathrm{id}_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$;

33.3. Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Omega\left(\lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \overline{\lambda}\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$

Q 32. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}$.

• Puisque $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ n'est pas nulle, la famille $\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$ est libre si, et seulement si, $\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$ n'est pas colinéaire à $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned} -\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= (\Omega \circ \Omega) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= \Omega\left(\lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) \\ &= \overline{\lambda}\Omega \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \overline{\lambda}.\lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et puisque $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \neq 0$ on aura $-1 = |\lambda|^2$ ce qui est absurde.

On en déduit que $\boxed{\text{la famille } \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right) \text{ est libre.}}$

- Soit $Z \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$, il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $Z = a\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$, alors

$$\Omega(Z) = \overline{a}.\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \overline{b}.(\Omega \circ \Omega)\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \overline{a}.\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) - \overline{b}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\forall Z \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$, $\Omega(Z) \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$.

$\boxed{\text{Le plan } \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right) \text{ est stable par } \Omega.}$

Q 33. Soit E un sous-espace vectoriel de$\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ stable par Ω et soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus E$.

On a bien sûr $\{0_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\} \subset E \cap \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$.

Soit $Z \in E \cap \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $Z = a\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + b.\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$, on a donc (vu ci-dessus) $\Omega(Z) = \overline{a}.\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) - \overline{b}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in E$ et par combinaison linéaire d'éléments de E, $\bar{a}.Z - b.\Omega(Z) \in E$.

$$\bar{a}.Z - b\Omega(Z) = (|a|^2 + |b|^2)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

On en déduit que si $|a|^2 + |b|^2 \neq 0$ alors $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{|a|^2 + |b|^2} Z \in E$ ce qui est absurde, donc $|a|^2 + |b|^2 = 0$ et par somme nulle de réels positifs on a $|a|^2 = 0 = |b|^2$ donc $a = b = 0$ et $Z = 0$.

$\boxed{\text{Finalement } E \cap \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right) = \{0_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}.}$

Personne n'est allé au delà de cette question, pour terminer je reproduis ici le corrigé de M; Guénier du lycée Buffon.

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on note $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique. On peut donc écrire : $\chi_{C_0} = \prod_{\lambda\, \mathrm{Sp}(C_0)} (X-\lambda)^{\alpha_\lambda}$. On note alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$:

$$F_\lambda = \ker\left((\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda}\right).$$

On admet, pour traiter la **Q36**, que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on a : $\dim F_\lambda = \alpha_\lambda$.

Q 34. On sait par la question 30 que $\chi_{C_0} \in \mathbb{R}[X]$ donc pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, $\overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}(C_0)$ et $\alpha_{\overline{\lambda}} = \alpha_\lambda$.

On rappelle également que $\Omega(C_0 Z) = C_0 \Omega(Z)$ (vu en question 31.), on obtient alors par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ \Omega(C_0^k Z) = C_0^k \Omega(Z)$ et $\Omega(\lambda Z) = \overline{\lambda}\Omega(Z)$, ce qui permet de montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ \Omega(P(C_0)Z) = \overline{P}(C_0)\Omega(Z)$$

• Soit $Z \in \Omega(F_\lambda)$, il existe $Z' \in F_\lambda$ tel que $Z = \Omega(Z')$ et alors

$$(\overline{\lambda} I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda} Z = \Omega\left((\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda})Z'\right) = \Omega(0) = 0$$

donc $Z \in F_{\overline{\lambda}}$.

• Réciproquement, soit $Z \in F_{\overline{\lambda}}$, alors $Z = \Omega(Z')$ avec $Z' = -\Omega(Z)$ (par question 31) et

$$(\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda} Z' = -\Omega((\overline{\lambda} I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda} Z) = -\Omega(0) = 0$$

donc $Z' \in F_\lambda$ et $Z = \Omega(Z') \in \Omega(F_\lambda)$.

Par double inclusion on a obtenu : $\boxed{\text{pour tout } \lambda \in \mathrm{Sp}(C_0), \text{ on a : } \Omega(F_\lambda) = F_{\overline{\lambda}}.}$

Q 35. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0) \cap \mathbb{R}$ alors $\overline{\lambda} = \lambda$ et F_λ est stable par Ω d'après la question 34.

On utilise la question 33 pour établir que F_λ est somme directe de plans :

• Soit $Z_1 \in F_\lambda$. Alors, d'après Q35, $(Z_1, \Omega(Z_1))$ est libre. Si $F_\lambda = \mathrm{Vect}(Z_1, \Omega(Z_1))$, alors F_λ est un plan donc est de dimension paire.

• Sinon, il existe $Z_2 \in F_\lambda \setminus \mathrm{Vect}(Z_1, \Omega(Z_1))$.

Montrons que $(Z_1, \Omega(Z_1), Z_2, \Omega(Z_2))$ est libre : si $Z = \lambda_1 Z_1 + \mu_1 \Omega(Z_1) + \lambda_2 Z_2 + \mu_2 \Omega(Z_2) = 0$ alors $Z' = \Omega(Z) = -\overline{\mu}_1 Z_1 + \overline{\lambda}_1 \Omega(Z_1) - \overline{\mu}_2 Z_2 + \overline{\lambda}_2 \Omega(Z_2) = 0$ puis

$$\overline{\lambda}_2 Z - \mu_2 Z' = (\lambda_1 \overline{\lambda}_2 + \overline{\mu}_1 \mu_2) Z_1 + (\overline{\lambda}_2 \mu_1 - \mu_2 \overline{\lambda}_1)\Omega(Z_1) + (\lambda_2 \overline{\lambda}_2 + \mu_2 \overline{\mu}_2) Z_2 = 0.$$

Puisque $(Z_1, \Omega(Z_1), Z_2)$ est libre ($Z_2 \notin \mathrm{Vect}(Z_1, \Omega(Z_1))$) , on déduit que $\lambda_2 = \mu_2 = 0$ puis que $\lambda_1 = \mu_1 = 0$. Si $F_\lambda = \mathrm{Vect}(Z_1, \Omega(Z_1)) \oplus \mathrm{Vect}(Z_2, \Omega(Z_2))$, alors $\dim F_\lambda = 4$ est paire et c'est terminé.

• Supposons construits $Z_1, \ldots, Z_k$ tels que $\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}(Z_i, \Omega(Z_i)) \subset F_\lambda$.

Si $F_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}(Z_i, \Omega(Z_i))$, alors F_λ est une somme directe de plans et est donc de dimsnion paire.

Sinon il existe $Z_{k+1} \in F_\lambda \setminus \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}(Z_i, \Omega(Z_i))$. On prouve que $(Z_1, \Omega(Z_1), \ldots, Z_{k+1}, \Omega(Z_{k+1}))$ est libre comme précédemment. Si … sinon …

Le processus s'arrête puisque F_λ est de dimension finie. Il existe donc $(Z_1,\ldots,Z_p)$ tel que $F_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}(Z_i,\Omega(Z_i))$ donc $\dim F_\lambda = 2p \in 2\mathbb{N}$. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)\cap\mathbb{R}$, alors $\boxed{F_\lambda \text{ est de dimension paire.}}$

Q 36. D'après ce qui précède, les valeurs propres réelles de C_0 sont d'ordre de multiplicité pair et pour λ valeur propre complexe non réelle, $\overline{\lambda}$ est également valeur propre de même ordre. Ainsi, $\det(C_0) = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(C_0)\cap\mathbb{R}} (\lambda^2)^{m'_\lambda} \cdot \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(C_0)\setminus\mathbb{R}} |\lambda|^{\alpha_\lambda} \in \mathbb{R}_+$.Conclure que : $\det(C_0) \in R_+$.

• • • FIN • • •