Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et tous les espaces vectoriels considérés sont des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels.

1 Produit scalaire

1.1 Définition d'un produit scalaire

Definition 1.1

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

On appelle produit scalaire sur E, toute forme bilinéaire symétrique définie-positive sur E.

Un produit scalaire sur E est donc une application $\varphi : (x,y) \in E \times E \mapsto \langle x, y\rangle$ telle que :

- φ est à valeurs dans $\mathbf{R}$.
- *Bilinéarité* $\begin{cases} \forall y \in E, \quad \begin{array}{l} E \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \langle x, y\rangle \end{array} \text{ est linéaire} \\ \\ \forall x \in E, \quad \begin{array}{l} E \to \mathbf{R} \\ y \mapsto \langle x, y\rangle \end{array} \text{ est linéaire.} \end{cases}$
- *Symétrie* $\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
- *Définie-positive :* $\forall x \in E, \quad x \neq 0 \Longrightarrow \langle x, x\rangle > 0$

On utilisera en général les notations $\langle x, y\rangle$ ou $(x|y)$ ou $x.y$ pour le produit scalaire, la dernière notation étant plutôt réservée à la géométrie.

Remarque 1.1 *Conséquence de la bilinéarité*

Pour $(x, x', y, y') \in E^4$, on aura :

$$\langle x + x', y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle + \langle x, y'\rangle + \langle x', y'\rangle$$

Et plus généralement pour $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) \in E^{n+p}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbf{R}^{n+p}$:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{k=1}^{p} \mu_k y_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda_i \mu_k \langle x_i, y_k\rangle$$

Proposition 1.1 *Caractérisation*

Soit $\varphi : \begin{array}{l} E \times E \to \mathbf{R} \\ (x,y) \mapsto \langle x, y\rangle \end{array}$.

φ est un produit scalaire sur E si et seulement si : $\begin{cases} \varphi \text{ est linéaire par rapport à la première variable} \\ \\ \varphi \text{ est symétrique} \\ \\ \forall x \in E \quad \langle x, x\rangle \geqslant 0 \text{ et } \langle x, x\rangle = 0 \Longrightarrow x = 0 \end{cases}$

Definition 1.2

• On appelle **espace préhilbertien réel** tout couple $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ où E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.

• On appelle **espace euclidien** tout espace préhilbertien réel de **dimension finie**.

1.2 Exemples de référence

1. **Produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$ et sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$** :

   L'application $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R} \\ (x, y) & \mapsto & \langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{array}$, avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$ appelé le produit scalaire canonique.
   $\mathbf{R}^n$ est ainsi muni de sa structure euclidienne canonique.

   Expression matricielle :

   Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors on peut écrire $X^T.Y = \langle x, y\rangle$.

   On en déduit que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R}) & \to & \mathbf{R} \\ (X, Y) & \longmapsto & X^T.Y \end{array}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$.
   Ce produit scalaire est appelé le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$.

2. **Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$** :

   Proposition 1.2
   L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \to & \mathbf{R} \\ (A, B) & \mapsto & \langle A, B\rangle = tr\left(A^T.B\right) \end{array}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ appelé produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

   De plus en notant $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, alors $\boxed{\langle A, B\rangle = tr\left(A^T.B\right) = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{ij} b_{ij}.}$

3. **Produits scalaires intégral sur $C^0([a, b], \mathbf{R})$** :

   Soit $E = C^0([a, b], \mathbf{R})$ avec $a < b$.

   L'application $\begin{array}{l} E \times E \to \mathbf{R} \\ (f, g) \mapsto \langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \end{array}$ est un produit scalaire sur E, appelé produit scalaire intégral sur $C^0([a, b], \mathbf{R})$.

1.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 1.3

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle x,y\rangle^2 \leqslant \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}$$

Avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires : $x = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbf{R}, \quad y = \lambda x$.

Remarque 1.2 *Application aux exemples de référence*

1. Si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ alors
$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$
avec égalité si et seulement si $(x_1, \dots, x_n) = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbf{R}, \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \quad y_i = \lambda x_i$.

2. Si $f \in C^0([a,b], \mathbf{R})$ et $g \in C^0([a,b], \mathbf{R})$ alors
$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \int_a^b)g^2(t)\mathrm{d}t$$
et $\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 = \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t. \int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t$ si et seulement si (f,g) est liée.

1.4 Norme euclidienne

Definition 1.3 *Norme euclidienne*

Soit E muni d'un produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$.

• Soit $x \in E$, on appelle **norme du vecteur** x le nombre réel, noté $\|x\|$, défini par : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

• On appelle **norme euclidienne** l'application $\begin{array}{l} E \to \mathbf{R}^+ \\ x \mapsto \|x\| \end{array}$.

Remarque 1.3 *Réécriture de l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2 \quad |\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|.\|y\|}$$

Proposition 1.4 *Propriété de la norme euclidienne*

Soit E muni d'un produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$.

1. $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

2. $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$

3. *Inégalité triangulaire* : $\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

   Avec églité si, et seulement si x et y sont liés positivement :
   $x = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbf{R}^+, \quad y = \lambda x$.

Proposition 1.5 *Relations entre produit scalaire et norme euclidienne*

Soit E muni d'un produit scalaire $\langle \quad , \quad \rangle$, et soit $(x, y) \in E^2$,

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$
- $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$
- $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ *Identité du parallélogramme*
- $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$ *ou* $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$ *Identités de polarisation*

2 Orthogonalité

Dans tout ce paragraphe E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \quad , \quad \rangle$.

Definition 2.1

1. On dit que x et y sont **deux vecteurs orthogonaux** lorsque $\boxed{\langle x, y\rangle = 0.}$

   On note alors $x \perp y$.

2. Soit A et B deux parties de E, on dit que A et B sont **orthogonales** lorsque

   $\boxed{\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad \langle a, b\rangle = 0.}$ On note $A \perp B$.

3. On appelle **orthogonal d'un sous-espace vectoriel** F, l'ensemble, noté $F^\perp$, défini par :

   $$\boxed{F^\perp = \{y \in E, \quad \forall x \in F \quad \langle x, y\rangle = 0\}.}$$

4. On appelle **orthogonal d'une partie** X de E, l'ensemble, noté $X^\perp$, défini par :

   $$\boxed{X^\perp = \{y \in E, \quad \forall x \in X \quad \langle x, y\rangle = 0\}.}$$

Remarque 2.1

- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de E, et c'est le seul vérifiant cette propriété.
- Si X est une partie de E, alors $X^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E et $X^{\perp} = Vect(X)^{\perp}$.
- Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux alors $F + G$ est une somme directe.
- Soit A et B deux parties de E. Si $A \subset B$ alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
- Si A est une partie de E alors $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$.

2.1 Familles orthogonale, orthonormée

Definition 2.2 *Famille orthogonale*

Soit $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E.
On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale lorsque $x_1, \dots, x_n$ sont 2 à 2 orthogonaux :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0$$

Proposition 2.1

Toute famille orthogonale $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs non nuls est libre.

Proposition 2.2 **Théorème de Pythagore**

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

- $x_1 \perp x_2 \iff \|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$
- Si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale alors $\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$

Definition 2.3 *Famille orthonormée*

Soit $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E.
On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille orthonormée (ou orthonormale) lorsque $x_1, \dots, x_n$ sont 2 à 2 orthogonaux et unitaires :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$$

2.2 Bases orthonormées

Dans ce paragraphe E est un espace préhilbertien réel.

Definition 2.4 *Base orthonormée*

On dit que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E lorsque :

$$(e_1, \dots, e_n) \text{ est une base de } E \text{ et est une famille orthonormée.}$$

Exemple 2.1

La base canonique est une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Proposition 2.3 *Expressions dans une base orthonormée*
Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E, alors pour tout $(x, y) \in E^2$ on a :

$$\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i}$$

En notant $\forall i \in [\![1, n]\!]^2 \quad x_i$ et y_i la $i^{\text{ième}}$ coordonnée de x et de y dans $\mathcal{B}$, on peut écrire :

$$\boxed{\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$$

Expression matricielle

Si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices des vecteurs x et y dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ alors

$$\langle x, y \rangle = X^T.Y \qquad \|x\|^2 = X^T.X$$

2.3 Existence de bases orthonormées en dimension finie

Remarque 2.2

Si x est un vecteur non nul de E alors $E = Vect(x) \oplus \{x\}^{\perp}$.

Proposition 2.4

Tout espace euclidien admet une base orthonormée.

Proposition 2.5 *Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*
Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est une méthode qui permet de construire à partir d'une famille libre $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille orthonormée $(u_1, \ldots, u_n)$ telle que

$$Vect(e_1, \ldots, e_n) = Vect(u_1, \ldots, u_n)$$

Le procédé est algorithmique et consiste à construire par récurrence, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, u_i tel que $\boxed{Vect(e_1, \ldots, e_i) = Vect(u_1, \ldots, u_i) \text{ avec } (u_1, \ldots, u_i) \text{ famille orthonormée.}}$

L'hérédité consiste à construire u_{i+1} comme le vecteur normalisé du vecteur v_{i+1} qui vérifie $v_{i+1} \in Vect(u_1, \ldots, u_i, e_{i+1})$ et $\forall k \in [\![1, i]\!] \quad \langle v_{i+1}, u_k \rangle = 0$.

On verra plus tard que v_{i+1} est la différence entre e_{i+1} et son projeté orthogonal sur $F_i = Vect(u_1, \dots, u_i)$.

Formules pratiques :

La famille$(u_1, \dots, u_n)$ est définie par :

$$u_1 = \frac{1}{\|e_1\|}e_1 \quad \forall i \in [\![2, n]\!], \quad u_i = \frac{1}{\|v_i\|}v_i \quad \text{où} \quad v_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle e_i, u_k \rangle u_k = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle e_i, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k \ .$$

Proposition 2.6 *Théorème de la base orthonormée incomplète*

Toute famille orthonormée d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormée.

3 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

3.1 Supplémentaire orthogonal

Proposition 3.1

Soit E un espace préhilbertien réel.

Si F est un sous-espace vectoriel de E de **dimension finie** alors $E = F \oplus F^{\perp}$.

On dit que $F^{\perp}$ est le supplémentaire orthogonal de F et parfois on note $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$.

Proposition 3.2 **Cas d'un espace euclidien**

Soit E est un espace **euclidien** de dimension $n \in \mathbf{N}^*$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $\begin{cases} E = F \oplus F^{\perp} \\ dim(F^{\perp}) = n - dim(F) \\ F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp} \end{cases}$

3.2 Projection orthogonale

Definition 3.1

Soit E un espace préhilbertien.
Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$.

On peut donc définir la projection sur F parallèlement à de $F^{\perp}$, cette projection est appelée

projection orthogonal sur F.

Si on la note p_F, pour $x \in E$, $p_F(x)$ est l'unique vecteur y de F tel que $x-y \in F^{\perp}$. $p_F(x)$ s'appelle le projeté orthogonal de x sur F.

Remarque 3.1

1. Dans le cas d'un espace euclidien, on peut toujours définir la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F.

2. On peut aussi définir la symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel de dimension finie : c'est la symétrie s_F associée à la projection orthogonale sur F :
   $s_F = 2p_F - Id_E$, donc s_F est l'application $\begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto y-z \end{array}$ où (y,z) est l'unique couple de $F \times F^{\perp}$ tel que $x = y+z$.

Proposition 3.3 *Propriétés d'une projection orthogonale*

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E, notons p_F la projection orthogonale sur F.

$$\text{Par définition} \quad \forall x \in E \quad \begin{cases} p_F(x) \in F \\ \\ x - p_F(x) \in F^{\perp} \end{cases}$$

On a aussi :

$$p_F \in \mathscr{L}(E) \qquad Ker(p_F) = F^{\perp} \qquad Im(p_F) = F = \{x \in E, \quad p_F(x) = x\} = Ker(p_F - Id_E)$$

On remarque que $Ker(p_F) = (Im(p_F))^{\perp}$.

Proposition 3.4 *Détermination pratique du projeté orthogonal d'un vecteur*

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie égale à $p \in \mathbf{N}^*$.

• Si $(e_1,\ldots,e_p)$ **est une base orthonormée de** F alors $\boxed{\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} (e_k|x)\, e_k.}$

• Si $(e_1,\ldots,e_p)$ **est une base quelconque de** F et x un vecteur de E alors $p_F(x)$ est caractérisé par :

$$\boxed{\begin{cases} \exists(\alpha_1,\ldots\alpha_p) \in \mathbf{R}^p \text{ tel que } p_F(x) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 + e_2 + \ldots + \alpha_p e_p \\ \text{et} \\ \quad \forall i \in [\![1,p]\!], \quad (x - p_F(x)|e_i) = 0 \end{cases}}$$

Exemple 3.1

Soit $F = Vect(e_1, e_2) \subset \mathbf{R}^3$ avec $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (1,1,1)$.
Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $x = (1,2,1)$ sur F.

3.3 Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** d'un espace préhilbertien E et $x \in E$.

Proposition 3.5 Definition 3.2

- Pour $x \in E$, l'application $\begin{array}{ccc} F & \to & \mathbf{R} \\ y & \mapsto & \|x-y\| \end{array}$ admet un minimum.
- Ce minimum est appelé **distance du vecteur x au sous-espace vectoriel F** et noté $d(x,F)$:

$$\boxed{d(x,F) = \underset{y\in F}{Min}\|x-y\|}$$

Proposition 3.6 distance à un sous-espace vectoriel et projection orthogonale

Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F :

$$\boxed{d(x,F) = \|x - p_F(x)\|}$$

Cette propriété permet de calculer certaines bornes inférieures, on peut en effet écrire, pour F sous-espace vectoriel de dimension finie, $\underset{y\in F}{Inf}\|x-y\|^2 = d^2(x,F) = \|x-p_F(x)\|^2 = \|p_{F^\perp}(x)\|^2$.

Exemple 3.2

Déterminer $\underset{(a,b)\in\mathbf{R}^2}{Inf}\displaystyle\int_0^1 (\ln(t) - at - b)^2 \mathrm{d}t$.

Proposition 3.7

Soit a un vecteur non nul et l'hyperplan $H = Vect(a)^\perp$.

- Le projeté orthogonal d'un vecteur x sur l'hyperplan $H = Vect(a)^\perp$ est : $\boxed{p_H(x) = x - \dfrac{\langle x,a\rangle}{\|a\|^2}a.}$
- La distance d'un vecteur x à l'hyperplan $H = Vect(a)^\perp$ est $\boxed{d(x,H) = \dfrac{|\langle x,a\rangle|}{\|a\|}.}$

Exemple 3.3

Dans $\mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, déterminer la distance du vecteur $x = (1,1,0)$ au plan d'équation $x+y+z=0$.

3.4 Formes linéaires sur un espace euclidien

Dans tout ce paragraphe E désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$.

Soit $a \in E$, l'application $\begin{array}{l} E \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \langle a, x\rangle \end{array}$ est une forme linéaire par bilinéarité du produit scalaire.
On peut la noter $\langle a, .\rangle$

Le théorème suivant montre que toutes les formes linéaires sont de ce type là.

Proposition 3.8

> φ est une forme linéaire sur E si et seulement si
>
> il existe un vecteur a de E tel que $\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle a, x\rangle$.
>
> Le vecteur a est unique.

Remarque 3.2 *Écriture d'une forme linéaire dans une base orthonormée*
Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de l'espace euclidien E, les formes linéaires sur E sont les applications $\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k e_k & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k x_k \end{array}$ avec $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$.

Definition 3.3 Vecteur normal à un hyperplan
Soit H un hyperplan de E.

On appelle vecteur normal à l'hyperplan H, tout vecteur non nul appartenant à $H^{\perp}$.

> a est un vecteur normal à H **ssi** $H = Vect(a)^{\perp}$.