$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On désigne, pour n entier naturel, $n \geq 2$:

— $M_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

— $D_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.

Une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel non nul p tel que A^p soit la matrice nulle.

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

> Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :
>
> (1) $A = D + N$;
> (2) D est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;
> (3) N est nilpotente ;
> (4) $DN = ND$.
>
> De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.
> Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A.

Partie I - Quelques exemples

Q1. (a) Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.

(b) Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.

(c) Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Q2. Donner un exemple d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.

Q3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.
Calculer son polynôme caractéristique χ_A, puis donner le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).

Q4. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.
Justifier que le polynôme $X(X-1)$ est annulateur de la matrice A^2.
Démontrer que le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par : $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

Q5. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.
On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

(a) La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{id})^2$.

(b) Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :
$\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_1\}$, $\ker(u - 2\mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_2\}$, $\ker(u - 2\mathrm{id})^2 = \mathrm{vect}\{e_2, e_3\}$.
Ecrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

(c) Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A.

Partie II - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leq i \leq p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i.
Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.
Pour tout $1 \leq i \leq p$, on notera v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.

En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v.

Q7. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.

Q8. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, démontrer que la matrice $A - B$ est nilpotente.

Q9. Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.

Q10. Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $M_n(\mathbb{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D, N) vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que D et N soient des polynômes en A.
Etablir l'unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.

Fin de l'énoncé