**Exercice 1**

Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels. Montrer que :

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2\sqrt{k}$$

**Exercice 2**

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}), \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) > 0\}$. Montrer que $A = \left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t, \quad f \in E\right\}$ est une partie de $\mathbf{R}$ qui admet une borne inférieure, et la déterminer.

**Exercice 3**

Soit $E$ un espace préhilbertien réel et $f, g : E \to E$ deux applications telles que

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \langle x, f(y)\rangle = \langle g(x), y\rangle$$

Montrer que $f$ et $g$ sont linéaires.

**Exercice 4**

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de son produit scalaire canonique : $\langle A, B\rangle = tr(A^T.B)$. On note $\mathcal{D}_n(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{D}_n(\mathbf{R})$.

**Exercice 5**

Pour $X$ et $Y$ dans $\mathcal{M}_{21}(\mathbf{R})$, on pose $(X|Y) = X^T.\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.Y$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{21}(\mathbf{R})$.
2. Déterminer l'orthogonal de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 6**

Soit $E$ un espace euclidien et $a$ un vecteur normé de $E$. Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, on considère $f_\alpha$ l'endomorphisme défini par $\forall x \in E \quad f_\alpha(x) = x + \alpha\langle x, a\rangle a$.

1. Déterminer les éléments propres de $f_\alpha$.
2. Pour quelles valeurs de $\alpha$, $f_\alpha$ est-il bijectif ?
3. Pour $\beta \in \mathbf{R}$, calculer $f_\alpha \circ f_\beta$, en déduire alors la bijection réciproque de $f_\alpha$ lorsque $f_\alpha$ est bijectif.

**Exercice 7**

Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace eulcidien.
Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, puis $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

**Exercice 8**

Soit $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs normés d'un espace préhilbertien réel $E$. Montrer que :
$(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $E$ si, et seulement si, $\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2$.

**Exercice 9**

Pour $P$ et $Q$ dans $\mathbf{R}_n[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Trouver une base orthonormée de $\mathbf{R}_3[X]$ pour ce produit scalaire.

**Exercice 10**

On considère $F = Vect(x_1, \dots, x_n)$ et $G = Vect(y_1, \dots, y_n)$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien $E$ tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \langle x_i, x_j\rangle = \langle y_i, y_j\rangle$$

1. Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si $(y_1, \dots, y_n)$ est libre.
2. Montrer que $F$ et $G$ ont même dimension.

**Exercice 11**

Soient $p$ et $q$ deux projections orthogonales d'un même espace euclidien $E$ tels que $p \circ q$ soit une projection orthogonale.

1. Montrer que $\forall (x,y) \in E^2 \quad \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$.
2. Montrer que $p \circ q = q \circ p$.
3. Montrer que $Sp(p+q) \subset \{0, 1, 2\}$.
   Donner un exemple où il y a égalité.

**Exercice 12**

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, on pose $\langle A, A'\rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriels des matrices triangulaires supérieures.

**Exercice 13**

On pose $E = \mathbf{R}_3[X]$ et pour tous polynôms P et Q de E : $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
Soit $F = \{P \in E, \quad \langle X^2 - 1, P'\rangle = \langle X, P\rangle\}$ et $Q = 1 + X + X^2 + X^3$.

1. Montrer que lm'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Déterminer $d(Q, F)$ la distance de $Q$ à $F$.
4. On munit $\mathbf{R}_n[X]$ du produit scalaire précéden, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note
   $P_k = \dfrac{1}{2^k.k!}(X^2 - 1)^k$ et $Q_k = P_k^{(k)}$. Montrer que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}_n[X]$. Cette base est-elle orthonormée ?