Exercice 1

Combien y a-t-il de matrices orthogonales d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{Z}$?

Exercice 2

On munit $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$ de son produit scalaire canonique. Soit U dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$ avec $U \neq 0$.

1. Montrer que $A = I_n - \dfrac{2}{\|U\|^2} U.U^T$ est une matrice orthogonale et symétrique.
2. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de A.

Exercice 3

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\chi_{JA}(X) = X^{n-1}(X - \alpha)$, où χ_{JA} est le polynôme caractéristique de JA.
   Écrire ce réel α en fonction des coefficients de la matrice A.
2. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $J + A$ n'est pas inversible si, et seulement si $-1 \in Sp(JA)$.
3. En déduire les matrices $A \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ telles que $J + A$ soit inversible.

Exercice 4

Soit $A = (a_{ij}) \in O_n(\mathbf{R})$. Montrer :

$$\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} \right| \leqslant n \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}| \leqslant n\sqrt{n}$$

(On pourra calculer AV où $V^T = (1, \ldots, 1)$.)

Exercice 5 *Décomposition QR*

1. Les colonnes d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont identifiées à des éléments de $\mathbf{R}^n$, que l'on munit de son produit scalaire canonique, et dont on note $\mathcal{B}_C$ la base canonique. Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$.
   (a) Soit $\mathcal{B} = (C_1, \ldots, C_n)$ la famille des colonnes de A.
   Justifier l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{B}_1 = (C'_1, \ldots, C'_n)$ de $\mathbf{R}^n$ telle que :
   $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad Vect(C_1, \ldots, C_k) = Vect(C'_1, \ldots, C'_k)$ et $\langle C_k, C'_k \rangle > 0$.
   (b) En déduire qu'il existe un couple (Q, R) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que :
   $A = QR$ avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.
   Indication : On pourra interpréter l'égalité à démontrer en termes de matrices de passage.
2. *Application :* Inégalité de Hadamard :
   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, montrer que :

$$|det(A)| \leqslant \sqrt{\prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}^2 \right)}$$

Exercice 6

Soit E un espace euclidien et deux projecteurs non nuls p et q et différents de Id_E.

1. Montrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si p est endomorphisme autoadjoint.
2. Montrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si $\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
3. Montrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si $\forall x \in E \quad \langle p(x), x\rangle \geqslant 0$.
4. On suppose dans cette question que p et q sont des projections orthogonales.
   Montrer que $p \circ q \circ p$ est un endomorphisme autoadjoint et que ses valeurs propres sont toutes dans l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 7

Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $M.M^T.M = I_n$.

Exercice 8

Soit $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$; Montrer que l'application $\varphi : (X, Y) \mapsto X^T.S.Y$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Exercice 9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique défini-positive. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A.

1. Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R}), \quad \lambda_1.X^T.X \leqslant X^T.A.X \leqslant \lambda_n.X^T.X$.
2. En déduire que tous les coefficients diagonaux de la matrice A sont strictement positifs.
3. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = B^T.B$.
4. Montrer qu'il existe une matrice S symétrique à valeurs propres strictement positives telle que $A = S^2$.

Exercice 10 *Décomposition de Choleski*

Le but de l'exercice est de démontrer que toute matrice symétrique réelle définie-positive S se décompose de façon unique sous la forme $S = T^T.T$ avec T matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. Cette décomposition s'appelle la décomposition de Chosleski de S

1. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs et $S = T^T.T$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

2. On suppose qu'il existe T_1 et T_2 deux matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $T_1^T.T_1 = T_2^T.T_2$.
   (a) Montrer que $\Delta = T_1.T_2^{-1}$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.
   (b) Montrer que $\Delta^2 = I_n$. En déduire que $T_1 = T_2$.

3. On suppose que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, on sait (exercice précédent) que $\langle X, Y\rangle = X^T.S.Y$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$.
   Soit $\mathcal{B} = (E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et $\mathcal{B}' = (V_1, \ldots, V_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $\mathcal{B}$ pour ce produit scalaire. On note T la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
   (a) Montrer que T est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.
   (b) Montrer que $S = T^T.T$.

Exercice 11

Soit $E = C^0([0, \frac{\pi}{2}], \mathbf{R})$. Pour tout couple $(f, g) \in E^2$, on définit le produit scalaire suivant :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

On considère les endomorphismes V et V^* de E définis par :
$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad V(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ et $V^*(f)(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t.$

1. Montrer que pour tout $(f, g) \in E^2$, $\langle V(f), g\rangle = \langle f, V^*(g)\rangle$.
2. Montrer que $V^* \circ V$ est un endomorphisme autoadjoint défini-positif.
3. Soit λ une valeur propre de $V^* \circ V$ associée au vecteur propre f_λ. Montrer que f_λ est de classe C^2 sur $[0, \pi/2]$ et déterminer une équation différentielle vérifiée par f_λ.

Exercice 12

Soit E un espace euclidien et f un automorphisme de E.
Montrer que f est une isométrie si, et seulement si, $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^{-1}(y)\rangle$.

Exercice 13

Soit E un espace euclidien et f une isométrie de E. Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si f est une symétrie.

Exercice 14

Soit $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^n b_k^2 = 1$. On note u l'endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à la matrice $2A - I_n$ avec $A = (b_i b_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer que u est une isométrie. Reconnaitre cette isométrie.

Exercice 15

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 muni d'une base orthonormale directe (e_1, e_2, e_3).
Soit a un vecteur unitaire de E.

1. Calculer $\|a \wedge e_1\|^2 + \|a \wedge e_2\|^2 + \|a \wedge e_3\|^2$.
2. Montrer que l'un des trois nombres $\|a \wedge e_1\|$, $\|a \wedge e_2\|$, $\|a \wedge e_3\|$ est supérieur ou égal à $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Exercice 16

Soit u un vecteur normé de $\mathbf{R}^3$. Déterminer tous les endomorphismes f de $\mathbf{R}^3$ tels que :
$\forall x \in \mathbf{R}^3 \quad (x \wedge u, f(x))$ est liée.

Exercice 17

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $\forall x \in E, \quad \langle u(x), x\rangle = 0$.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$.
2. Montrer que la matrice de u dans une base orthonormée directe est antisymétrique.
3. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que $\forall x \in E, \quad u(x) = a \wedge x$.
4. Exprimer u^3 en fonction de u.

Exercice 18

Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 \\ 1-\sqrt{3} & 1 & -1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'endomorphisme u de l'espace eulcidien $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Montrer que $A \in SO_3(\mathbf{R})$.
2. Déterminer les vecteurs invariants par u.
3. Donner les éléments caractéristique de u.

Exercice 19

Dans l'espace euclidien orienté $\mathbf{R}^3$, on considère la rotation r d'axe D dirigé par un vecteur normé d et d'angle de mesure θ.

1. Soit $x \in \mathbf{R}^3$, montrer que si $x \perp d$ alors $\quad r(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta).d \wedge x$
2. En déduire que pour tout vecteur x de $\mathbf{R}^3$

$$r(x) = \cos(\theta)x + (1-\cos(\theta))\langle d, x\rangle.d + \sin(\theta).d \wedge x$$