Dans tout ce chapitre E désigne un espace euclidien, $n \in \mathbf{N}^*$ désigne la dimension de E, et le produit scalaire est noté $\langle\ \ ,\ \ \rangle$.

1 Matrices orthogonales

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$ est muni de son produit scalaire canonique : $\langle X, Y\rangle = X^T.Y$.

Definition 1.1
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On dit que A est une matrice orthogonale lorsque $A^T.A = I_n$

Proposition 1.1 *Caractérisations des matrices orthogonales*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

• **Carctérisation par l'inverse** :

A est orthogonale **ssi** $A \in GL_n(\mathbf{R})$ et $A^{-1} = A^T$.

• **Caractérisation par les vecteurs colonnes** :

A est orthogonale **ssi** la famille $(C_1, \dots, C_n)$ des colonnes de A est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$.

• **Caractérisation par les lignes** :

A est orthogonale **ssi** la famille $(L_1, \dots, L_n)$ des lignes de A est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbf{R})$.

• **Caractérisation par les coefficients** :

$A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est orthogonale **ssi** $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$.

Remarque 1.1
On en déduit de l'équivalence précédente que si A est orthogonale alors

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^2 = 1 \qquad \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2 = n \qquad \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad |a_{ij}| \leqslant 1$$

Remarque 1.2 *Matrice orthogonale et produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$*

On se place dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$ muni de son produit scalaire canonique : $\langle X, Y\rangle = ^t X.Y$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Si A est une matrice orthogonale alors :

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})^2 \quad \langle AX, AY\rangle = \langle X, Y\rangle \text{ et } \|AX\| = \|X\|$$

Proposition 1.2 *Groupe orthogonal d'ordre n*

On note $O_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1. $I_n \in O_n(\mathbf{R})$.
2. $O_n(\mathbf{R})$ est inclus dans $GL_n(\mathbf{R})$.
3. $O_n(\mathbf{R})$ est stable par produit : $\forall (A,B) \in O_n(\mathbf{R})^2 \quad AB \in O_n(\mathbf{R})$.
4. $O_n(\mathbf{R})$ est stable par passage à l'inverse : $\forall A \in O_n(\mathbf{R}) \quad A^{-1} \in O_n(\mathbf{R})$.

$O_n(\mathbf{R})$ s'appelle le groupe orthogonal d'ordre n, c'est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbf{R}), .)$.

Proposition 1.3 *Déterminant et valeurs propres d'une matrice orthogonale*

$$\boxed{\forall A \in O_n(\mathbf{R}) \quad det(A) \in \{-1, 1\} \text{ et } Sp_{\mathbf{R}}(A) \subset \{-1, 1\}}$$

Proposition 1.4 *Groupe spécial orthogonal d'ordre n*

On note $SO_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant égal à 1 (aussi noté $O_n^+(\mathbf{R})$).

1. $I_n \in SO_n(\mathbf{R})$.
2. $SO_n(\mathbf{R})$ est stable par produit : $\forall (A,B) \in SO_n(\mathbf{R})^2 \quad AB \in SO_n(\mathbf{R})$.
3. $SO_n(\mathbf{R})$ est stable par passage à l'inverse : $\forall A \in SO_n(\mathbf{R}) \quad A^{-1} \in SO_n(\mathbf{R})$.

$SO_n(\mathbf{R})$ s'appelle le groupe spécial orthogonal d'ordre n, c'est un sous-groupe de $(O_n(\mathbf{R}), .)$.

Proposition 1.5 *Matrice de passage entre 2 bases orthonormées*

Soit E un espace euclidien muni d'une base **orthonormée** $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

$\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E **ssi** $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale.

La matrice de passage entre deux bases orthonormées est donc une matrice orthogonale.

Corollaire 1.6 *Conséquence sur les formules de changement de bases*

Soit E un espace euclidien muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et soit u un endomorphisme de E.

On note $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, $A' = M_{\mathcal{B}'}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ et P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées alors $A = P.A'.P^{-1} = P.A'.P^T$.

2 Réduction des endomorphismes autoadjoints

2.1 Généralités sur les endomorphismes autoadjoints

Definition 2.1

On dit que u est un endomorphisme autoadjoint lorsque

$$\begin{cases} u \in \mathscr{L}(E) \\ \text{ et} \\ \forall (x,y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle \end{cases}$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

Exemple 2.1

• Id_E est un endomorphisme autoadjoint.

• Soit p un projecteur de E.
p est un projecteur orthogonal **ssi** p est un endomorphisme autoadjoint.

Remarque 2.1 *Orthogonalité des vecteurs propres*

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

Si x et y sont des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes alors $x \perp y$.

Proposition 2.1 *Caractérisation matricielle*

Soit u un endomorphisme de E.

u est autoadjoint si et seulement si

sa matrice **dans une base orthonormée** est symétrique.

Un endomorphisme autoadjoint est aussi appelé endomorphisme symétrique

Remarque 2.2

• $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ et $dim\mathcal{S}(E) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

• Soit u un endomorphisme autoadjoint de matrice A dans une **base orthonormée**, et soit x et y deux vecteurs de E.
Si X et Y sont les matrices-colonnes des vecteurs x et y dans cette base orthonormée alors

$$\langle u(x), y \rangle = X^T.A.Y = \langle x, u(y) \rangle \text{ et } \langle u(x), x \rangle = X^T.A.X$$

2.2 Théorème spectral

Proposition 2.2 *Polynôme caractéristique d'une matrice symétrique réelle, d'un endomorphisme autoadjoint*

Si A est une matrice **symétrique réelle** alors son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbf{R}$.
Ce qui signifie que le polynôme caractéristique n'a que des racines réelles.

Si u est un endomorphisme autoadjoint de E alors son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbf{R}$

Proposition 2.3 **Théorème spectral**

Si u est un endomorphisme autoadjoint de E alors, il existe une **base orthonormée** de E formée de vecteurs propres de u.

On dit que u est diagonalisable en **base orthonormée**.

Si $A \in S_n(\mathbf{R})$ alors il existe $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbf{R})$ et il existe $P \in O_n(\mathbf{R})$ telles que :

$A = P.D.P^{-1} = P.D.{}^tP$ $\quad$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *étant les valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité.*

Definition 2.2 *Endomorphisme autoadjoint positif ou défini-positif*

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. On dit que :

1. u est positif lorsque :
$$\forall x \in E \quad \langle u(x), x\rangle \geqslant 0$$
et on notera $u \in \mathcal{S}^+(E)$.

2. u est défini-positif lorsque :
$$\forall x \in E \quad x \neq 0 \Longrightarrow \langle u(x), x\rangle > 0$$
et on notera $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

Proposition 2.4 *Caractérisation spectrale*

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

- $u \in \mathcal{S}^+(E) \Longleftrightarrow Sp(u) \subset [0, +\infty[$
- $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \Longleftrightarrow Sp(u) \subset]0, +\infty[$

Definition 2.3 *Matrice symétrique positive, définie-positive*

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
On dit que :

1. S est positive lorsque : $\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R}) \quad X^T.S.X \geqslant 0$.
   On notera $S \in S_n^+(\mathbf{R})$.

2. S est définie-positive lorsque : $\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R}) \quad X \neq 0 \Longrightarrow X^T.S.X > 0$.
   On notera $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

Proposition 2.5 *Caractérisation spectrale*

Soit $S \in S_n(\mathbf{R})$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ S \in S_n^+(\mathbf{R}) \Longleftrightarrow Sp(S) \subset [0, +\infty[\\[1em] \bullet\ S \in S_n^{++}(\mathbf{R}) \Longleftrightarrow Sp(S) \subset]0, +\infty[\end{array}}$$

3 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Definition 3.1

On appelle isométrie vectorielle de E tout endomorphisme de E qui conserve la norme euclidienne :

$$\boxed{u \in \mathscr{L}(E) \text{ et } \forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|}$$

On parlera souvent plus simplement d'isométrie.

Proposition 3.1

Si u est une isométrie de E alors u est un automorphisme de E : $u \in GL(E)$.

Exemple 3.1

• Id_E est une isométrie.
• Toute symétrie orthogonale est une isométrie.
• Attention une projection orthogonale, autre que l'identité, n'est pas une isométrie.

Proposition 3.2 *Caractérisation par conservation du produit scalaire*

u est une isométrie de E **ssi** u est un endomorphisme qui conserve le produit scalaire :

$$\boxed{u \in \mathscr{L}(E) \text{ et } \forall (x, y) \in E^2 \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle}$$

Proposition 3.3 *Caractérisation par action sur une base orthonormée*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormée** de E et soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

u est une isométrie si, et seulement si $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Autrement dit : Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. u est une isométrie **ssi** *u transforme une base orthonormée de E en une base orthonormée de E.*

Proposition 3.4 *Caractérisation matricielle des isométries*

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

u est une isométrie **ssi** sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale.

Une isométrie est aussi appelée un automorphisme orthogonal.

Proposition 3.5 *Groupe orthogonal*

On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de E.

1. $Id_E \in O(E)$.
2. $O(E)$ est stable par composition : $\forall (u, v) \in O(E)^2, \quad u \circ v \in O(E)$.
3. $O(E)$ est stable par passage à l'inverse : $\forall u \in O(E), \quad u^{-1} \in O(E)$.

$O(E)$ s'appelle le groupe orthogonal de E, c'est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.

Proposition 3.6 *Stabilité par une isométrie de l'orthogonal d'un sous-espace stable*

Soit u une isométrie de E.

Si F est un sous-espace vectoriel stable par u alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

4 Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace euclidien de dimension $n = 2$ ou 3.

4.1 Orientation

Rappel :

• Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ sont deux bases orthonormées de l'espace euclidien E et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors $P \in O_n(\mathbf{R})$, donc $|det(P)| = 1$, c'est-à-dire

$$\boxed{det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \pm 1}$$

• De plus $P^{-1} = P^T$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ et

$$\boxed{det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = det(P^T) = det(P) = \pm 1.}$$

Definition 4.1

- On dit que deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ définissent la même **orientation** lorsque $det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.

- Orienter l'espace euclidien E c'est choisir l'ensemble des bases orthonormées qui ont la même orientation qu'une base orthonormée fixée, de référence. Ces bases sont alors dites **bases orthonormées directes**.
  Les autres bases orthonormées sont dites **bases orthonormées indirectes**.

Remarque 4.1

Dans le cas de $E = \mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, la base orthonormée de référence est la base canonique.

Remarque 4.2

- Les matrices de passage entre bases orthonormées directes de E sont les matrices de $SO_n(\mathbf{R})$ (matrices orthogonales de déterminant 1).
- Permuter deux vecteurs d'une base orthonormée directe, ou changer le sens d'un des vecteurs d'une base orthonormée change l'orientation (directe ou indirecte) de cette base selon les propriétés du déterminant.

4.2 Produit mixte

Rappel :

Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ sont deux bases de l'espace euclidien E, et si $u_1, \ldots, u_n$ sont n vecteurs de E alors $\boxed{det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}').det_{\mathcal{B}'}(u_1, \ldots, u_n).}$

Proposition 4.1

On considère une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de n vecteurs de E (avec $dim(E) = n$).

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées directes de E alors
$det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \ldots, u_n)$

Definition 4.2 *Produit mixte*

Soit un n-uplet $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E (on rappelle que $n = dimE$).

On appelle **produit mixte** de $(u_1, \ldots, u_n)$, noté $[u_1, u_2, \ldots, u_n]$, le déterminant de $(u_1, \ldots, u_n)$ dans une base orthonormée directe de E.

$$[u_1, u_2, \ldots, u_n] = det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

avec $\mathcal{B}$ base orthonormée directe de E.

Remarque 4.3 *Interprétation géométrique*

- Dans $\mathbf{R}^2$ orienté par sa base canonique, si $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ alors

$$[\vec{u}, \vec{v}] = det \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} = xy' - x'y$$

  $[\vec{u}, \vec{v}]$ est égal à l'aire algébrique du parallélogramme de côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- Dans $\mathbf{R}^3$ orienté par sa base canonique, si $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (x', y', z')$, $\vec{\omega} = (x'', y'', z'')$ alors

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}] = det \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$$

  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}]$ est égal au volume algébrique du parallélépipède de côtés $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{\omega}$.

4.3 Produit vectoriel

Dans ce paragraphe, E est un espace euclidien de dimension 3.

Remarque 4.4

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbf{R} \\ \vec{\omega} & \mapsto & [\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}] \end{array}$ est une forme linéaire sur l'espace euclidien E.
On sait alors qu'il existe un unique vecteur a de E tel que $\forall \vec{\omega} \in E, \quad \varphi(\vec{\omega}) = \langle a, \vec{\omega} \rangle$.

Definition 4.3

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E.

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ l'unique vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, qui vérifie

$$\forall \vec{\omega} \in E, \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}] = \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{\omega} \rangle$$

Proposition 4.2 *Calcul dans une base orthonormée directe*

Si $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **orthonormée directe** de E alors $\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}}$

Remarque 4.5

• $\forall (u, v) \in E^2 \quad (u \wedge v) \perp u$ et $(u \wedge v) \perp v$.

• Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe alors :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

Remarque 4.6 *Orientation en dimension 3*

Dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ orienté par sa base canonique.
Tout sous-espace vectoriel peut être considéré comme un espace euclidien muni du produit scalaire de $\mathbf{R}^3$, on en déduit qu'il peut aussi être orienté.

- On oriente un plan $H = Vect(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathbf{R}^3$ par le vecteur normal $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
- On oriente la droite D de $\mathbf{R}^3$ d'équations cartésiennes $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$ par le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ avec $\vec{u} = (a, b, c)$ et $\vec{v} = (a', b', c')$.

5 Isométries vectorielles d'un plan euclidien orienté

On détermine d'abord $O_2(\mathbf{R})$ et $SO_2(\mathbf{R})$ pour obtenir les matrices orthogonales d'ordre 2, puis on détermine les isométries en dimension 2.

Proposition 5.1

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

1. $A \in O_2(\mathbf{R})$ **ssi** il existe un unique réel θ de $]-\pi, \pi]$ tel que

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R(\theta) \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = S(\theta)}$$

2. • $A \in SO_2(\mathbf{R}) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbf{R} \quad A = R(\theta)$.

   • $A \in O_2(\mathbf{R}) \backslash SO_2(\mathbf{R}) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbf{R} \quad A = S(\theta)$.

Definition 5.1

On appelle **rotation d'un plan euclidien orienté**, toute isométrie vectorielle du plan telle que $det(u) = +1$.

On appelle **réflexion d'un plan euclidien orienté**, toute symétrie orthogonale par rapport à une droite D. D étant appelée l'axe de la réflexion.

Proposition 5.2

Une isométrie vectorielle u est une rotation **ssi** il existe $\theta \in \mathbf{R}$, tel que sa matrice dans toute base orthonormée directe s'écrit $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

u est alors appelée rotation d'angle θ, que l'on peut noter r_θ.

Remarque 5.1

Si r_θ et r_φ sont deux rotations du plan alors $r_\theta \circ r_\varphi = r_{\theta+\varphi} = r_\varphi \circ r_\theta$.

Proposition 5.3

Une isométrie vectorielle s est une réflexion **ssi** sa matrice dans une base orthonormée directe (e_1, e_2) s'écrit $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbf{R}$.

s est alors la réflexion d'axe $D = ker(s - Id_E) = Vect(a)$ avec $a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e_2$.

Les isométries d'un plan euclidien orienté sont donc les rotations et les réflexions.

Definition 5.2

Soit x et y sont deux vecteurs non nuls.

On appelle mesure de l'angle orienté $(\overset{\frown}{x, y})$ le réel θ tel que $\begin{cases} \langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \rangle = \cos(\theta) \\ \left[\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right] = \sin(\theta) \end{cases}$.

Remarque 5.2 *Détermination pratique de l'angle d'une rotation plane*

Si x est un vecteur non nul et r_θ est la rotation d'angle de mesure θ alors $\theta = (\overset{\frown}{x, r_\theta(x)})$ et

$$\frac{\langle x, r_\theta(x) \rangle}{\|x\|^2} = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{[x, r_\theta(x)]}{\|x\|^2} = \sin(\theta)$$

6 Isométries vectorielles d'un espace euclidien orienté de dimension 3

Dans ce paragraphe E désigne un espace euclidien orienté de dimension égale à 3.

Remarque 6.1

Toute matrice de $SO_3(\mathbf{R})$ admet 1 pour valeur propre.

Proposition 6.1 *Matrices de $SO_3(\mathbf{R})$*

$$\boxed{A \in SO_3(\mathbf{R}) \iff \exists P \in O_3(\mathbf{R}) \quad \exists \theta \in \mathbf{R} \quad , A = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.P^T}$$

Definition 6.1 *Rotation en dimension 3*

On appelle rotation vectorielle de E toute isométrie vectorielle de déterminant égal à 1.

Remarque 6.2

u est une rotation vectorielle de E **ssi** il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{d})$ de E telle que : $\begin{cases} Ker(u - Id_E) \text{ est la droite dirigée par } \vec{d} \\ \\ Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

Si $\theta \in 2\pi\mathbf{Z}$ alors $u = Id_E$.

Sinon on dit que $\boxed{u \text{ est appelée la rotation d'axe } D = Ker(u - Id_E) \text{ dirigé par } \vec{d} \text{ et d'angle de mesure } \theta.}$

Remarque 6.3 *Déterminantion pratique*

Soit u est une rotation d'axe dirigé par un vecteur normé $\vec{d}$ et d'angle de mesure θ.
Soit x un vecteur de E.

$$\boxed{\text{Si } x \perp \vec{d} \text{ et } \|x\| = 1 \text{ alors} \quad \langle x, u(x) \rangle = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad [x, u(x), \vec{d}] = \sin(\theta)}$$

On peut aussi remarquer que si M est la matrice de la rotation u alors $tr(M) = 2\cos(\theta) + 1$.

Exemple 6.1

Vérifier que l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une rotation. Donner ses éléments caractéristiques.