$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On désigne, pour n entier naturel, $n \geq 2$:

— $M_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

— $D_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.

Une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel non nul p tel que A^p soit la matrice nulle.

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

> Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :
>
> (1) $A = D + N$;
> (2) D est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;
> (3) N est nilpotente ;
> (4) $DN = ND$.
>
> De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.
> Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A.

Partie I - Quelques exemples

Q1. (a) • Si A de $M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable alors son polynôme caractéristique est scindé et en posant $D = A$ et $N = O_n$, on a $A = D + N$ avec les conditions 2),3),4) remplies.

$\boxed{\text{La décomposition de Dunford de } A \text{ est donc } (A, O_n).}$

• Si la matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}$ et il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$, donc X^P est un polynôme annulateur de A et donc $Sp(A) \subset \{0\}$. On en déduit que $\chi_A = X^n$ qui est scindé. A admet une unique décomposition de Dunford, or en posant $D = O_n$ et $N = A$, les conditions 1),2),3),4) sont remplies. $\boxed{\text{La décomposition de Dunford de } A \text{ est donc } (O_n, A).}$

(b) Par propriété on sait qu'une matrice est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé. D'après le théorème admis en début d'énoncé,

$\boxed{\text{toute matrice trigonalisable admet une décomposition de Dunford.}}$

(c) Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a bien $A = D + N$ mais $D.N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $ND = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $DN \neq ND$.

$\boxed{(D, N) \text{ n'est pas la décomposition de Dunford de } A.}$

Q2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, si A admet une décomposition de Dunford (D, N) alors D est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ avec $\chi_A = \chi_D$ qui doit donc être scindé sur $\mathbb{R}$, or
$\chi_A = X^2 - tr(A)X + det(A) = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est une matrice n'admettant pas de décomposition de Dunford dans } M_2(\mathbb{R}).}$$

Q3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.
Le polynôme caractéristique χ_A est défini par : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= det(xI_3 - A) \\
&= \begin{vmatrix} x-3 & 0 & -8 \\ -3 & x+1 & -6 \\ 2 & 0 & x+5 \end{vmatrix} \\
&\ \text{en développant par rapport à la seconde colonne} \\
&= (-1)^{2+2}(x+1) \begin{vmatrix} x-3 & -8 \\ 2 & x+5 \end{vmatrix} \\
&= (x+1)\left[(x-3)(x+5) + 16\right] \\
&= (x+1)(x^2 + 2x + 1) \\
\chi_A(x) &= (x+1)^3
\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de A est scindé donc A admet une décomposition de Dunford (D, N) avec D diagonalisable et $\chi_D = \chi_A = (X+1)^3$ alors $X + 1$ est annulateur de D et donc $D = -I_3$.
Notons $N = A - D = A + I_3$, χ_A est annulateur de A donc $N^3 = 0$, N est bien nilpotente et $DN = -N = ND$, donc

$$\boxed{(D, N), \text{ avec } D = -I_3 \text{ et } N = A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ est la décomposition de Dunford de } A.}$$

On remarque que D et N sont bien des polynômes en A : $D = P(A)$ avec $P = -1$ et $N = Q(A)$ avec $Q = X + 1$.

Q4. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.

Notons P le polynôme $X(X-1)$, on a

$$P(A^2) = A^2.(A^2 - I_n) = A^2(A - I_n).(A + I_n) = O_n.(A + I_n) = O_n$$

$$\boxed{\text{Donc le polynôme } X(X-1) \text{ est annulateur de la matrice } A^2.}$$

Notons $D = A^2$ et $N = A - A^2 = -A(A - I_n)$. On aura $A = D + N$, avec D diagonalisable puisque D admet le polynôme scindé à racines simples $X(X-1)$ comme polynôme annulateur.
A et $(A - I_n)$ commutent donc

$$N^2 = (A(A - I_n))^2 = A^2(A - I_n)^2 = A^2(A - I_n)(A - I_n) = O_n(A - I_n) = O_n$$

N est nilpotente et puisque D et N sont des polynômes en A on sait que $DN = ND$.

$$\boxed{(A^2, A - A^2) \text{ est bien la décomposition de Dunford de } A.}$$

Q5. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.
On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

(a) On calcule le polynôme caractéristique de A donné par : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= det(xI_3 - A) \\
&= \begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ -2 & x & -1 \\ -1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{on effectue } C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \\
&= \begin{vmatrix} x-3 & 1 & 0 \\ -2 & x & x-1 \\ -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{puis } L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
&= \begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ -1 & x-1 & 0 \\ -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{on développe par rapport à la troisième colonne} \\
&= (-1)^{3+3}(x-1) \begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)\left[(x-3)(x-1)+1\right] \\
&= (x-1)(x^2-4x+4) \\
\chi_A(x) &= (x-1)(x-2)^2
\end{aligned}$$

Le polynôme χ_A est scindé et ses racines sont 1 et 2 avec 2 racine double. On sait alors que A est diagonalisable si et seulement si $(X-1)(X-2)$ est annulateur de A or

$$(A-I_3)(A-2I_3)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\2&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a&b\\c&d&e\\x&y&z\end{pmatrix}\neq O_3$$

$\boxed{A \text{ n'est donc pas diagonalisable dans } M_2(\mathbb{R}).}$

• Montrons que $\mathbb{R}^3=\ker(u-\mathrm{id})\oplus\ker((u-2\mathrm{id})^2)$:

<u>*1ère méthode :*</u>

• Montrons que $Ker(u-\mathrm{id})\cap\ker((u-2\mathrm{id})^2)=\{0\}$:

Soit $x\in Ker(u-\mathrm{id})\cap\ker((u-2\mathrm{id})^2)$, alors $u(x)=x$ et

$$0=(u-2\mathrm{id})^2(x)=u^2(x)-4u(x)+4x=x-4x+4x=x$$

donc $x=0$ et on a $\ker(u-\mathrm{id})\cap Ker((u-2\mathrm{id})^2)\subset\{0\}$ et finalement l'égalité puisque ce sont des sous-espaces vectoriels.

• $\ker(u-\mathrm{id})$ est le sous-espace propre de u associé à la valeur propre simple 1 donc $dim\ker(u-\mathrm{id})=1$.

$(u-\mathrm{id})^2$ est de matrice $(A-2I_3)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}$, les deux premières colonnes de cette matrice sont colinéaires et la troisième est nulle donc $(A-2I_3)^2$ est de rang égal à 1, par le théorème du rang on a alors $dim\ker((u-2\mathrm{id})^2=2$. On a obtenu :

$$\boxed{\begin{cases}\ker(u-\mathrm{id})\cap\ker((u-2\mathrm{id})^2)=\{0\}\\ dim\ker(u-\mathrm{id})+dim\ker((u-2\mathrm{id})^2)=dim\mathbb{R}^3\end{cases}\text{ donc } \mathbb{R}^3=\ker(u-\mathrm{id})\oplus\ker((u-2\mathrm{id})^2).}$$

<u>*2nde méthode :*</u>

u étant un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, on a : $\ker(u-\mathrm{id})+\ker(u-2\mathrm{id})^2\subset\mathbb{R}^3$.
On sait que le polynôme caractéristique de u, qui est aussi celui de A, est annulateur de u donc $\chi_A(u)=(u-\mathrm{id})\circ(u-2\mathrm{id})^2=0$.

Vu la factorisation du polyôme caractéristique, pour $x\in\mathbb{R}^3$, on peut penser à poser $y=(u-2\mathrm{id})^2(x)$ et $z=x-y$, car $(u-\mathrm{id})(y)=\chi_A(u)(x)=0$ donc $y\in\ker(u-\mathrm{id})$ et $x=y+z$.
Montrons qu'alors on a bien $z\in\ker((u-2\mathrm{id})^2)$:

$$\begin{aligned}
(u-2\mathrm{id})^2(z) &= (u-2\mathrm{id})^2(x)-(u-2\mathrm{id})^2(y)\\
&= (u-2\mathrm{id})^2(x)-(u-2\mathrm{id})^4(x)\\
&= \left[(u-2\mathrm{id})^2\circ\left(id-(u-2\mathrm{id}^2)\right)\right](x)\\
&= \left[(u-2\mathrm{id})^2\circ(-u^2+4u-3\mathrm{id})\right](x)\\
&= \left[(u-2\mathrm{id})^2\circ(u-\mathrm{id})\circ(3\mathrm{id}-u)\right](x)\\
&= \left[(3\mathrm{id}-u)\circ\chi_A(u)\right](x)\\
(u-2\mathrm{id})^2(z) &= 0
\end{aligned}$$

On a donc prouvé $\mathbb{R}^3\subset\ker(u-\mathrm{id})+\ker((u-2\mathrm{id})^2)$, d'où l'égalité :
$\mathbb{R}^3=\ker(u-\mathrm{id})+\ker((u-2\mathrm{id})^2)$.

• On montre que $\ker(u-\mathrm{id})+\ker((u-2\mathrm{id})^2)$ est une somme directe en vérifiant que $Ker(u-\mathrm{id})\cap\ker((u-2\mathrm{id})^2)=\{0\}$ comme en méthode 1.

On a bien obtenu : $\boxed{\mathbb{R}^3=\ker(u-\mathrm{id})\oplus\ker((u-2\mathrm{id})^2).}$

3ième méthode :
Soit $x\in\mathbb{R}^3$.

• Supposons qu'il existe $y\in\ker(u-\mathrm{id})$ et $z\in\ker((u-2\mathrm{id})^2)$ tels que $x=y+z$, alors $u(y)=y$ et $u^2(z)-4u(z)+4z=0$ donc on a par linéarité de u :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& y+z\\ u(x) &=& u(y)+u(z)\\ u^2(x) &=& u^2(y)+u^2(z)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x &=& y+z\\ u(x) &=& y+u(z)\\ u^2(x) &=& y+4u(z)-4z\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} z &=& x-y\\ u(z) &=& y-u(x)\\ u^2(x) &=& y+4(u(x)-y)-4(x-y)\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} z &=& x-y\\ u(z) &=& y-u(x)\\ y &=& u^2(x)-4u(x)+4x\end{array}\right.$$

Si y et z existent alors on a nécessairement $y=(u-2\mathrm{id})^2(x)$ et $z=x-y$, d'où l'unicité de y et z s'ils existent.

• Posons $y=(u-2\mathrm{id})^2(x)$ et $z=x-y$, alors $x=y+z$.
Et on vérifie comme dans la méthode précédente que $(u-2\mathrm{id})^2(z)=0$ et $(u-\mathrm{id})(y)=0$.

On aura alors obtenu (par analyse-synthèse) :
$\forall x\in\mathbb{R}^3\quad \exists!(y,z)\in\ker(u-\mathrm{id})\times\ker((u-2\mathrm{id})^2),\quad x=y+z$, donc

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \ker(u - \text{id}) \oplus \ker((u - 2\text{id})^2).}$$

(b) • 1 est valeur propre de u (racine de χ_A) d'ordre de multiplicité 1 donc $\ker(u - \text{id})$ est de dimension 1.

Pour x vecteur de $\mathbb{R}^3$ on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice de ses coordonnées dans la base canonique.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A - I_3) \iff (A - I_3).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} y = 2x + z \\ x - (2x + z) + z = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = z \end{array} \right.$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A - I_3) \iff X = z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\boxed{\ker(u - \text{id}) = \text{vect}(e_1) \text{ avec } e_1 = (0, 1, 1).}$

• On cherche de même $Ker(u - 2\text{id})$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A - 2I_3) \iff (A - 2I_3).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = 0 \end{array} \right.$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A - 2I_3) \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\boxed{\ker(u-2\mathrm{id}) = \mathrm{vect}(e_2) \text{ avec } e_2 = (1,1,0).}$

• On cherche maintenant un vecteur e_3 tel que $e_3 \notin Vect(e_2)$ et $e_3 \in \ker(u-2\mathrm{id})^2$.

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker((A-2I_3)^2) &\iff (A-2I)^2X = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} -x+y=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \\
&\iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or $e_3 = (0,0,1) \notin \mathrm{vect}(e_2)$ donc

$$\boxed{\ker((u-2\mathrm{id})^2 = Vect(e_2,e_3) \text{ avec } e_2 = (1,1,0) \in \ker(u-2\mathrm{id}) \text{ et } e_3 = (0,0,1).}$$

D'après la matrice A on sait que $u(e_3) = (1,1,2) = e_2 + 2e_3$ et on sait que $\mathbb{R}^3 = \ker(u-\mathrm{id}) \oplus \ker((u-2\mathrm{id})^2)$, donc (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$

(c) Si on pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on remarque que $B = D+N$, D est diagonale donc diagonalisable, $N^2 = 0$, et $DN \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$, donc

$$\boxed{(D,N) \text{ est la décomposition de Dunford de la matrice } B.}$$

On sait que $A = P.B.P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = D+N$, alors en posant $D' = P.D.P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $N' = P.N.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

- $A = D' + N'$,
- D' est diagonalisable, puisque semblable à D diagonale,
- N' est nilpotente, puisque $N'.N' = P.N^2.P^{-1} = 0$,
- $D'N' = P(DN)P^{-1} = P(ND)P^{-1} = N'D'$.

$\boxed{(D', N') \text{ est donc la décomposition de Dunford de la matrice } A.}$

Partie II - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leq i \leq p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i.

• Soit $i \in [\![1, p]\!]$, si $x \in \ker(u - \lambda_i \mathrm{id})$ alors

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda_i x) = \lambda_i v(x)$$

et donc $v(x) \in \ker(u - \lambda_i \mathrm{id})$. $\boxed{E_{\lambda_i}(u) = \ker(u - \lambda_i \mathrm{id}) \text{ est donc stable par } v.}$

• Puisque u est diagonalisable on sait que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$.

Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on note v_i l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(u)$ induit par v.

Puisque v est diagonalisable, on sait que v_i est aussi diagonalisable. Il existe donc une base $\mathcal{B}_i$ de $E_{\lambda_i}(u)$ formée de vecteurs propres de v_i donc de vecteurs propres de v. Alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E formée de vecteurs propres de v, mais les vecteurs de cette base étant dans les sous-espaces propres de u, c'est aussi une base formée de vecteurs propres de u.

$\boxed{\text{Il existe donc une base commune de diagonalisation pour } u \text{ et } v.}$

Q7. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent.

D'après ce qui précède, en notant u et v les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés aux matrices A et B, on sait qu'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de u et de v. Soit P la matrice de passage de la base canonique à cette base de diagonalisation, P est inversible et les matrices $A' = P^{-1}.A.P$ et $B' = P^{-1}.B.P$ sont diagonales puisque ce sont les matrices de u et v dans la base commune de diagonalisation .

On en déduit que $A - B = P.A'.P^{-1} - P.B'.P^{-1} = P.(A' - B').P^{-1}$ avec $A' - B'$ diagonale.

$\boxed{A - B \text{ est donc diagonalisable.}}$

Q8. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent.

Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $A^p = 0$ et $B^q = 0$. Puisque A et B commutent, on sait que :

$$(A-B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k (-1)^{p+q-k} B^{p+q-k}$$

Si $k \in [\![0, p-1]\!]$ alors $p+q-k \in [\![q+1, p+q]\!]$ et donc $B^{p+q-k} = 0$.
Si $k \in [\![p, p+q]\!]$ alors $A^k = 0$. Finalement $\forall k \in [\![0, p+q]\!] \quad A^k B^{p+q-k} = 0$ donc $(A-B)^{p+q} = 0$ avec $p+q \in \mathbb{N}^*$. $\boxed{\text{La matrice } A-B \text{ est bien nilpotente.}}$

Q9. Soit M dans $M_n(\mathbb{K})$ qui soit à la fois diagonalisable et nilpotente. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$ et il existe P inversible et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ telles que $D = P^{-1}.M.P$.

Par récurrence on a $\forall k \in \mathbb{N}^* \ D^k = P^{-1}.M^k.P$, donc

$$D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^p \end{pmatrix} = P^{-1}.M^p.P = 0$$

On en déduit que $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_i = 0$ et donc $D = 0 = M$. La matrice nulle étant diagonalisable et nilpotente $\boxed{\text{dans } M_n(\mathbb{K}) \text{ seule la matrice nulle est à la fois diagonalisable et nilpotente.}}$

Q10. Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $M_n(\mathbb{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D, N) vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que D et N soient des polynômes en A.

Supposons qu'il existe deux couples (D, N) et (D', N') vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tels que D, N, D' et N' soient des polynômes en A.

On aura $D + N = A = D' + N'$ donc $D - D' = N' - N$.

D et D' sont des polynômes en A donc D et D' commmutent et comme elles sont diagonalisables, on sait que $D - D'$ est diagonalisable (question 7).

De même N et N' sont des polynômes en A donc N et N' commutent et donc $N' - N$ est nilpotente (question 8).

La matrice $D - D' = N' - N$ est à la fois diagonalisable et nilpotente, alors elle est nulle d'après le résultat de la question 9. On a donc $D = D'$ et $N = N'$.

$\boxed{\text{Ce qui prouve l'unicité dans la décomposition de Dunford de } A.}$

Fin du corrigé