Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices complexes M d'ordre 2 qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

Dans cette relation, a et b sont des nombres complexes, i vérifie $i^2 = -1$, $\bar{a}$ (resp. $\bar{b}$) est le nombre complexe conjugué de a (resp. de b).

Pour $M \in \mathcal{M}$, on note $\overline{M}$ la matrice $\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{ib} \\ \overline{i\overline{b}} & \overline{\overline{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & -i\bar{b} \\ -ib & a \end{pmatrix}$.

I est la matrice identité d'ordre 2. Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{M}$; la matrice transposée de M est notée M^T. Si p est un entier naturel M^p est le produit de la matrice M p-fois avec elle-même ; classiquement $M^0 = I$.

1 Questions préliminaires

question 1.1

1. Montrer qu'en munissant l'ensemble $\mathcal{M}$ de l'addition des matrices et de la multiplication des matrices par un réel, l'ensemble $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel réel.

2. Préciser la dimension de $\mathcal{M}$.

3. Démontrer que le produit de deux matrices M_1 et M_2 de l'espace $\mathcal{M}$ appartient à $\mathcal{M}$.

question 1.2

Soient M_1 et M_2 deux matrices appartenant à l'espace vectoriel $\mathcal{M}$; soit $\langle M_1, M_2\rangle = \dfrac{1}{2} Tr\left(\overline{M_1}.M_2^T\right)$.

Montrer que l'application $\varphi : (M_1, M_2) \mapsto \langle M_1, M_2\rangle$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}$.

Ainsi $\mathcal{M}$ est un espace euclidien.

Notations et définitions

• Deux matrices M_1 et M_2 de l'espace $\mathcal{M}$ dont le produit scalaire $\langle M_1, M_2\rangle$ est nul seront dites perpendiculaires.

• Soit $\mathcal{G}$ le sous-ensemble : $\mathcal{G} = \{G \in \mathcal{M}, \quad det(G) = 1\}$
Il est admis que l'ensemble $\mathcal{G}$ est non vide, stable pour le produit des matrices et stable par passage à l'inverse.

• Soit $\mathcal{U}$ le sous-ensemble : $\mathcal{U} = \left\{U \in \mathcal{M}, \quad U + U^T = 0, \quad U^2 = -I\right\}$

• Soit $\mathcal{V}$ le sous-ensemble des matrices symétriques appartenant à l'espace $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{V} = \left\{V \in \mathcal{M}, \quad V = V^T\right\}$$

Il est admis que le sous-ensemble $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$.

2 Première partie

question 2.1 *Propriétés élémentaires de l'espace $\mathcal{M}$*

1. Soit M une matrice de l'espace $\mathcal{M}$; démontrer que les matrices $M + \overline{M}^T$ et $M.\overline{M}^T$ s'expriment au moyen de la matrice identité I, du déterminant $det(M)$, de la trace $Tr(M)$ de la matrice M.

2. Déduire du résultat précédent que, pour qu'une matrice G de l'espace $\mathcal{M}$ appartienne à $\mathcal{G}$, il faut et il suffit qu'il existe une relation simple entre les matrices G^{-1} et $\overline{G}^T$.

3. Soit M une matrice de l'espace $\mathcal{M}$ dont la trace est nulle ($Tr(M) = 0$) ; établir la relation : $M = -\overline{M}^T$.
   Calculer les matrices M^2, $(M^T)^2$ en fonction du déterminant de la matrice M et de la matrice unité I.

question 2.2 *Matrices U*

1. Déterminer les matrices U qui appartiennent à l'ensemble $\mathcal{U}$ défini précédemment.

2. Soit M une matrice de l'espace $\mathcal{M}$, U est une matrice de l'ensemble $\mathcal{U}$. Comparer les produits de matrices : $M.U$ et $U.\overline{M}$.
   Démontrer que lorsque la trace de la matrice M est nulle ($Tr(M) = 0$), les deux matrices $M.U$ et $U.M$ appartiennent au sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$.

question 2.3 *Norme d'une matrice M*

1. Soit M une matrice de l'espace $\mathcal{M}$, calculer la norme de la matrice M ($\|M\| = \sqrt{\langle M, M\rangle}$) en fonction du déterminant de cette matrice.

2. Comparer pour deux matrices M et W de l'espace $\mathcal{M}$, la norme $\|M.W\|$ du produit des matrices M et W avec le produit $\|M\|.\|W\|$ des normes de ces matrices.

question 2.4 *Matrices appartenant à $\mathcal{G}$*

1. Démontrer que toute matrice G appartenant à $\mathcal{G}$ s'écrit, de manière unique, sous la forme
   $$G = I\cos\theta + M,$$
   où θ est un réel appartenant au segment $[0, \pi]$ et M une matrice de trace nulle ($Tr(M) = 0$) qui appartient à $\mathcal{M}$.

   Calculer en fonction du réel θ, le déterminant de la matrice M, ainsi définie à partir de la matrice G, ainsi que le carré M^2 de la matrice M.

2. Soit M une matrice de l'espace $\mathcal{M}$ différente de 0 ($M \neq 0$) ; démontrer que la matrice G_1 définie par la relation ci-dessous appartient à $\mathcal{G}$:
   $$G_1 = \frac{1}{\sqrt{det(M)}} M$$

3 Deuxième partie

Dans toute cette partie, G est une matrice donnée de $\mathcal{G}$, de trace nulle ($Tr(G) = 0$) ; étant donnée une matrice W appartenant au sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$, soit $\ell_G(W)$ la matrice définie par la relation suivante :

$$\ell_G(W) = G.W + W.G^T$$

question 3.1 *L'endomorphisme ℓ_G de $\mathcal{V}$*

1. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel réel $\mathcal{V}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$. Déterminer une base de ce sous-espace vectoriel.

2. Démontrer que l'application $\ell_G : W \mapsto l_G(W)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$.
   Démontrer que cet endomorphisme ℓ_G n'est pas identiquement nul.

question 3.2 *Propriétés de l'endomorphisme ℓ_G*

1. (a) Comparer l'endomorphisme $\ell_G \circ \ell_G : W \mapsto \ell_G(\ell_G(W))$ à l'endomorphisme $W \mapsto 2G.l_G(W)$.

   (b) Calculer l'expression $\ell_G(G.\ell_G(W))$ en fonction de $\ell_G(W)$.

   (c) Comparer les deux normes $\|\ell_G(W)\|$ et $\|G.\ell_G(W)\|$.

   (d) Calculer, pour une matrice U de l'ensemble $\mathcal{U}$, l'expression $\ell_G(G.U)$.

2. Déterminer une relation simple qui lie, pour deux matrices quelconques V et W de l'espace $\mathcal{V}$, les produits scalaires $\langle \ell_G(V), W \rangle$ et $\langle V, \ell_G(W) \rangle$.

3. Déduire des résultats précédents, que, pour toute matrice W de $\mathcal{V}$, les matrices $\ell_G(W)$ et $G.\ell_G(W)$ sont perpendiculaires.

question 3.3 *Une base de l'espace $\mathcal{V}$*

Etant données une matrice V de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ telle que son image par l'endomorphisme ℓ_G soit différente de 0 ($\ell_G(V) \neq 0$), une matrice U de l'ensemble $\mathcal{U}$ (U appartient à $\mathcal{M}$, est antisymétrique, et $U^2 = -I$), soient H_0 le produit des matrices G et U, H_1 l'image de la matrice V par l'application l_G, H_2 le produit des matrices G et H_1 :

$$H_0 = G.U \qquad H_1 = \ell_G(V) \qquad H_2 = G.\ell_G(V)$$

1. Calculer les produits scalaires de la matrice U avec chacune des matrices H_i, $0 \leqslant i \leqslant 2$, et des matrices H_i, $0 \leqslant i \leqslant 2$, deux à deux :

$$\forall i \in [\![0, 2]\!] \quad \langle U, H_i \rangle \qquad \text{et} \qquad \forall (j, k) \in [\![0, 2]\!]^2 \quad \langle H_j, H_k \rangle$$

   Que peut-on dire de la famille (U, H_0, H_1, H_2) pour l'espace vectoriel $\mathcal{M}$?

2. (a) Démontrer que la suite des matrices H_i, $0 \leqslant i \leqslant 2$, est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$.

(b) Déduire de cette base une base orthonormée de $\mathcal{V}$.

(c) Quelle est la matrice associée à l'endomorphisme ℓ_G dans cette base ? Déterminer la transformation géométrique associée à l'endomorphisme $\dfrac{1}{2}\ell_G$.

question 3.4 *Un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$*

Soit θ un réel donné appartenant au segment $[0, 2\pi]$; soit M_θ la matrice définie par la relation :

$$M_\theta = I\cos\theta + G\sin\theta$$

Soit s_θ l'application qui, à une matrice W de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$, associe la matrice $M_\theta.W$:

$$s_\theta : W \mapsto M_\theta.W$$

1. Montrer que M_θ appartient à $\mathcal{G}$.

2. Déterminer la matrice associée à l'endomorphisme s_θ dans la base définie par les matrices U, H_0, H_1, H_2.

Fin du problème