Problème I : Voir corrié du DS 03 Sujet B

Problème II : Extrait de CCMP PSI 2001

Dans tout ce problème, l'entier n est supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$) ; E est un espace vectoriel complexe de dimension n.

Définitions :

Une application u de E dans lui-même est dite semi-linéaire si elle possède la propriété suivante :

Pour tout scalaire a et tout couple de vecteurs x et y de l'espace vectoriel E la relation ci-dessous est vérifiée :

$$u(ax + y) = \overline{a}u(x) + u(y).$$

Le nombre complexe $\overline{a}$ est le nombre complexe conjugué de a.

Un nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u s'il existe un vecteur x différent de 0 tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$u(x) = \mu x.$$

Le vecteur x est un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre μ.

Objectif :

Le but est d'étudier, pour une application semi-linéaire u donnée, les valeurs et vecteurs co-propres.

I Premières propriétés

Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E.

Q 23. Soit un vecteur x différent de 0, appartenant à l'espace E, supposons que μ_1 et μ_2 soient deux complexes tels que les relations $u(x) = \mu_1 x$ et $u(x) = \mu_2 x$ aient lieu, alors $\mu_1 x = \mu_2 x$ et donc $(\mu_1 - \mu_2)x = 0$. Le vecteur x étant non nul il vient $\mu_1 = \mu_2$.

> On en déduit que pour un vecteur x donné différent de 0, appartenant à l'espace E, il existe au plus un nombre complexe μ tel que la relation $u(x) = \mu x$ ait lieu.

Q 24. On suppose que le nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u, alors il existe un vecteur x non nul tel que $u(x) = \mu x$.

Soit un réel θ, le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore valeur co-propre de l'application semi-linéaire u, si et seulement si il existe un vecteur y dans E tel que $u(y) = \mu e^{i\theta} y$.

Cherchons ce vecteur y sous la forme $y = e^{i\alpha}x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

On sait que $u(y) = u(e^{i\alpha}x) = e^{-i\alpha}u(x) = \mu e^{-i\alpha}x$, on aura donc $u(y) = \mu e^{i\theta}y \Longleftrightarrow \mu e^{i\theta}e^{i\alpha}x = \mu e^{-i\alpha}x$.
Il suffit donc de choisir α tel que $\theta + \alpha = -\alpha$, ce qui donne $\alpha = -\dfrac{\theta}{2}$.

On a donc $u(y) = \mu e^{i\theta}y$ avec $y = e^{-i\theta/2}x$ qui est bien un vecteur non nul.

On a donc $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mu e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de u et un vecteur co-propre associé est $y = e^{-i\theta/2}x$ avec x un vecteur co-propre x associé à la valeur co-propre μ.

Q 25. Étant donnée une valeur co-propre μ de l'application semi-linéaire u, soit E_μ l'ensemble des vecteurs x de l'espace vectoriel E qui vérifient la relation $u\,(x) = \mu x$:

$$E_\mu = \{x \in E \;/\; u\,(x) = \mu x\}\,.$$

Par définition de μ, E_μ est inclus dans E et contient au moins un vecteur non nul.

• Si $\mu \neq 0$, alors pour tout complexe non nul α et tout x non nul de E_μ, on aura

$$u(\alpha x) - \mu\alpha = \overline{\alpha}u(x) - \mu\alpha x = \mu.\left(\overline{\alpha} - \alpha\right)x \neq 0$$

donc $\alpha x \notin E_\mu$ et E_μ n'est pas un espace vectoriel complexe.

• Si $\mu = 0$, alors pour tout complexe α et tout couple (x, y) de vecteurs de E_μ, on a

$$u(\alpha x + y) = \overline{\alpha}u(x) + u(y) = 0 = \mu(\alpha x + y)$$

donc $(\alpha x + y) \in E_\mu$ et E_μ est donc un sous-espace vectoriel complexe de E.

• Pour tout réel α et tout couple (x, y) de vecteurs de E_μ, on a :

$$u(\alpha x + y) = \overline{\alpha}u(x) + u(y) = \alpha u(x) + u(y) = \alpha\mu x + \mu y = \mu(\alpha x + y)$$

donc $\alpha x + y \in E_\mu$ et E_μ est un sous-espace vectoriel réel de E.

E_μ est toujours un espace vectoriel réel et c'est un espace vectoriel complexe seulement pour $\mu = 0$.

Q 26. Étant données deux applications semi-linéaires u et v, pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout complexe α on a :

$$(u \circ v)(\alpha x + y) = u\left(v(\alpha x + y)\right) = u\left(\overline{\alpha}v(x) + v(y)\right) = \overline{\overline{\alpha}}u(v(x)) + u(v(y)) = \alpha(u \circ v)(x) + (u \circ v)(y)$$

Donc $u \circ v$ est une application linéaire.

II Matrice associée à une application semi-linéaire

Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E ; soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de l'espace vectoriel E. À un vecteur x, de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, est associée une matrice-colonne X, d'éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$, appelée (abusivement) vecteur.

Q 27. Soit une application semi-linéaire u et une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E.

Pour tout $x \in E$, il existe d'uniques complexes $x_1, \ldots, x_n$ tels que $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, alors

$$y = u(x) = \sum_{j=1}^{n} u(x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j}u(e_j)$$

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad u(e_j) \in E \text{ donc } \exists!(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j}) \in \mathbb{C}^n \quad u(e_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}e_i$$

On aura donc

$$y = u(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{x_j} a_{i,j} e_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\overline{x_j}\right) e_i$$

Ce qui donne matriciellement :

$$y = u(x) \Longleftrightarrow Y = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\overline{x_j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}\overline{x_j} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow Y = A.\overline{X}$$

avec $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall j \in [\![1, n]\!] \quad a_{1,j}, \dots, a_{n,j}$ sont les coordonnées du vecteur $u(e_j)$ dans la base $(e_i)_{1 \le i \le n}$ de E.

Q 28. Soient A et B les matrices associées à une même application semi-linéaire u dans les bases $(e_i)_{1 \le i \le n}$ et $(f_i)_{1 \le i \le n}$ respectivement. Soit S la matrice de passage de la base $(e_i)_{1 \le i \le n}$ à la base $(f_i)_{1 \le i \le n}$.

Notons X et Y les matrices colonnes des coordonnées de deux vecteurs x et y dans la base $(e_i)_{1 \le i \le n}$, et X', Y' celles dans la base $(f_i)_{1 \le i \le n}$. On sait, par les formules de changement de bses que $X = SX'$, $Y = SY'$ et S est inversible.

On aura alors $y = u(x) \Longleftrightarrow Y = A\overline{X}$ et $y = u(x) \Longleftrightarrow Y' = B.\overline{X'}$, ce qui donne :

$$SY' = A\overline{S.X'} = A.\overline{S}.\overline{X'}$$

et donc $Y' = S^{-1}.A.\overline{S}.\overline{X'}$.
On a donc

$$\forall X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \quad B\overline{X'} = S^{-1}.A.\overline{S}.\overline{X'}$$

En prenant pour X' les matrices $E_1, \dots, E_n$ de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on obtient $\boxed{B = S^{-1}.A.\overline{S}}$ par égalité des coefficients d'indice (i, j) de ces deux matrices.

Étant donnée une matrice carrée A, complexe d'ordre n, le vecteur X, différent de 0, $(X \neq 0)$ est un vecteur co-propre de la matrice A, associé à la valeur co-propre μ, si le vecteur X et le nombre complexe μ vérifient la relation matricielle ci-dessous :

$$A.\overline{X} = \mu X.$$

Dans la suite toutes les matrices considérées sont des matrices carrées complexes.

III Exemples :

Q 29. Soit A la matrice d'ordre 2 définie par la relation suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche les complexes

μ tels qu'il existe $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq 0$ tel que $A\overline{X} = \mu X$.

$$\begin{aligned}
A\overline{X} = \mu X \text{ et } X \neq 0 &\iff \begin{pmatrix} -\overline{b} \\ \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu a \\ \mu b \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} -\overline{b} = \mu a \\ \overline{a} = \mu b \\ (a,b) \neq (0,0) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} b = -\overline{\mu}.\overline{a} \\ \overline{a} = -\mu.\overline{\mu}.\overline{a} \\ (a,b) \neq (0,0) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} b = -\overline{\mu}.\overline{a} \\ \overline{a} = -|\mu|^2.\overline{a} \\ (a,b) \neq (0,0) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} b = -\overline{\mu}.\overline{a} \\ 1 = -|\mu|^2 \\ (a,b) \neq (0,0) \end{cases}
\end{aligned}$$

Or $|\mu|^2 \geqslant 0$ donc le dernier système n'est jamais vérifié.

$$\boxed{\text{La matrice } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ n'admet pas de valeur co-propre.}}$$

Q 30. Si une matrice A est réelle et admet une valeur propre réelle λ, alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \neq 0$ et $A.X = \lambda.X$. Or $\overline{X} = X$ donc $A.\overline{X} = \lambda.X$ avec $X \neq 0$, ce qui signifie que λ est une valeur co-propre de A.

$$\boxed{\text{Cette matrice } A \text{ a donc au moins une valeur co-propre.}}$$

IV Correspondance entre les valeurs co-propres de la matrice A et les valeurs propres de la matrice $A.\overline{A}$:

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n.

Q 31. On suppose que le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A, alors il existe $X \neq 0$ tel que $A\overline{X} = \mu X$. On a alors, par propriété de l'application conjugué et du produit matriciel :

$$\begin{aligned}
A\overline{X} = \mu X &\implies \overline{A.\overline{X}} = \overline{\mu.X} \\
&\implies \overline{A}.X = \overline{\mu}.\overline{X} \\
&\implies A.\overline{A}.X = \overline{\mu}.A.\overline{X} = \overline{\mu}.\mu.X \\
A\overline{X} = \mu X &\implies \left(A.\overline{A}\right).X = |\mu|^2.X
\end{aligned}$$

Et puisque $X \neq 0$, $\boxed{\text{le réel } |\mu|^2 \text{ est une valeur propre de la matrice } A.\overline{A}.}$

Q 32. Soit λ une valeur propre positive ou nulle ($\lambda \geq 0$) de la matrice $A.\overline{A}$ et X un vecteur propre associé :

$$A.\overline{A}.X = \lambda X.$$

• Supposons que les vecteurs $A.\overline{X}$ et X soient liés ; puisque $X \neq 0$, cela signifie qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $A.\overline{X} = \alpha X$, donc α est une valeur co-propre de A et par la question précédente $A.\overline{A}.X = |\alpha|^2.X$, donc $|\alpha|^2 = \lambda$, ou encore $|\alpha| = \sqrt{\lambda}$.

α est une valeur co-propre de A, alors $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \alpha e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de A (question 24) or $\alpha = |\alpha|.e^{i\arg(\alpha)}$, donc $|\alpha| = \sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de A (prendre $\theta = -\arg(\alpha)$).

• Supposons que les vecteurs $A.\overline{X}$ et X soient indépendants.
On a donc $\forall(\alpha,\beta) \neq (0,0), \quad Y = \alpha A\overline{X} + \beta.X \neq 0$. Cherchons $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ tel que $A.\overline{Y} = \sqrt{\lambda}.Y$

$$\begin{aligned} A.\overline{Y} &= \overline{\alpha}.A.\overline{A}.X + \overline{\beta}.A.\overline{X} \\ &= \overline{\alpha}\lambda.X + \overline{\beta}A.\overline{X} \\ A.\overline{Y} &= \overline{\beta}.A.\overline{X} + \overline{\alpha}\lambda.X \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$A.\overline{Y} = \sqrt{\lambda}.Y \iff \overline{\beta}.A.\overline{X} + \overline{\alpha}\lambda.X = \sqrt{\lambda}.\alpha.A.\overline{X} + \sqrt{\lambda}.\beta.X$$

par liberté de la famille $(A.\overline{X}, X)$ on a

$$A.\overline{Y} = \sqrt{\lambda}.Y \iff \begin{cases} \overline{\beta} = \alpha.\sqrt{\lambda} \\ \overline{\alpha}\lambda = \sqrt{\lambda}.\beta \end{cases}$$

$$\iff \beta = \overline{\alpha}\sqrt{\lambda}$$

On a donc $Y = A.\overline{X} + \sqrt{\lambda}.X \neq 0$ et $A.\overline{Y} = \sqrt{\lambda}.Y$, donc $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de A.

Dans tous les cas on a bien $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de A.

Q 33. Les questions 31 et 32 montrent que le réel positif ou nul μ est valeur co-propre de la matrice A, si et seulement si le réel μ^2 est valeur propre de la matrice $A.\overline{A}$.

Q 34. Étant donné un réel m, soit A_m la matrice définie par la relation suivante :

$$A_m = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs co-propres réelles positives de A_m sont donc les racines carrées des valeurs propres positives de la matrice $A_m.\overline{A_m}$.
A est à coefficients réels donc $A.\overline{A_m} = A_m^2 = \begin{pmatrix} m^2-1 & -m \\ m & -1 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est

$$\chi_{A_m^2} = X^2 - tr(A_m^2)X + det(A_m^2) = X^2 - (m^2-2)X + 1$$

Le discriminant de $\chi_{A_m^2}$ est $\Delta = (m^2-2)^2 - 4 = m^4 - 4m^2 = m^2(m-2)(m+2)$, on en déduit que la matrice $A_m.\overline{A_m}$ admet des valeurs propres réelles si et seulement si $|m| \geqslant 2$ ou $m = 0$.

• Si $m \in]-2,2[$ et $m \neq 0$ alors A_m n'a pas de valeurs co-propres positives.

• Si $m \in \{-2,0,2\}$ alors $\Delta = 0$ et l'unique valeur propre de $A.\overline{A}$ est 1, donc l'unique valeur co-propre positive de A_m est 1.

• Si $m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ alors $\Delta > 0$ et $A.\overline{A}$ admet deux valeurs propres réelles qui sont $\lambda_1 = \dfrac{m^2-2+m\sqrt{m^2-4}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{m^2-2-m\sqrt{m^2-4}}{2}$ avec $\lambda_1+\lambda_2 = tr(A^2) = m^2-2 > 0$ et $\lambda_1\lambda_2 = 1$, donc ces deux réels sont positifs. La matrice A_m admet donc deux valeurs co-propres qui sont $\mu_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\dfrac{m^2-2+m\sqrt{m^2-4}}{2}}$ et $\mu_2 = \sqrt{\dfrac{m^2-2-m\sqrt{m^2-4}}{2}}$.

V Cas d'une matrice triangulaire supérieure :

Dans cette partie la matrice A est une matrice triangulaire supérieure (les éléments situés en-dessous de la diagonale principale sont nuls).

Q 35. Si λ est une valeur propre de A alors λ est un des coefficients de la diagonale de la matrice triangulaire A.

Notons $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors $\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & (\overline{*}) \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$ et $A.\overline{A} = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & (**) \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad |\lambda_i|^2$ est une valeur propre positive de $A.\overline{A}$, on sait alors (question 32) que $|\lambda_i|$ est une valeur co-propre de A.

Si λ est une valeur propre de la matrice A, alors $|\lambda|$ est une valeur co-propre de A et par question 24 on a $\lambda = |\lambda|.e^{i\arg(\lambda)}$ est aussi une valeur co-propre de A et toujours par la question 24 on obtient que

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R}\quad \lambda e^{i\theta} \text{ est une valeur co-propre de } A.}$$

Q 36. Si μ est une valeur co-propre de la matrice A, alors $|\mu| = \mu.e^{-i\arg(\mu)}$ est une valeur co-propre positive de A (question 24) alors (question 33) $|\mu|^2$ est une valeur propre de $A.\overline{A}$, et comme les valeurs propres de $A.\overline{A}$ sont les réels $|\lambda_i|^2$ avec $i \in [\![1,n]\!]^2$ et λ_i valeur propre de A (question précédente), il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $|\mu|^2 = |\lambda_k|^2$. On a alors $\lambda_k = |\mu|e^{i\arg(\lambda_k)} = \mu.e^{i(\arg(\lambda_k)-\arg(\mu))}$ et λ_k est une valeur propre de A.

$$\boxed{\text{Il existe donc } \theta\in\mathbb{R} \text{ tel que } \mu.e^{i\theta} \text{ soit une valeur propre de } A.}$$

Q 37. Soit A la matrice définie par la relation ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

• La seule valeur propre de la matrice triangulaire A est $\lambda = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. On sait alors par question 35 que $1 = ie^{-i\frac{\pi}{2}}$ est une valeur co-propre de A.

• X est un vecteur co-propre de A associé à la valeur co-propre 1 si, et seulement si $A.\overline{X} = 1.X$.

Soit $X = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} A.\overline{X} = X &\iff \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a-ib \\ c-id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} ai+b+c-id \\ ci+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} b+c+i(a-d) = a+ib \\ ci+d = c+id \end{array} \right. \end{aligned}$$

par identification des parties réelles et imaginaires on a

$$\begin{aligned} A.\overline{X} = X &\iff \left\{ \begin{array}{l} b+c = a \\ a-d = b \\ d = c \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} c = d \\ a = b+d \end{array} \right. \end{aligned}$$

On en déduit que le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur co-propre de A associé à la valeur co-propre 1.

VI Une caractérisation des valeurs co-propres :

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n ; soient B et C les matrices réelles définies par la relation suivante :

$$A = B + iC.$$

Q 38. D'après la question 24, le nombre complexe μ est valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre réel $|\mu|$ est valeur co-propre de A puisque $\mu = |\mu|.e^{i\arg(\mu)}$ et $|\mu| = \mu.e^{-i\arg(\mu)}$.

Motrons alors que $|\mu|$ est une valeur co-propre de A si, et seulement si, $|\mu|$ est une valeur propre de la matrice D, carrée réelle d'ordre $2n$, définie par blocs par la relation suivante :

$$D = \begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix}.$$

Soit X et Y des matrices colonnes réelles à n lignes, par produit de matrices par blocs compatibles on a :

$$\begin{aligned} D.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = |\mu|.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} BX+CY \\ CX-BY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\mu|.X \\ |\mu|.Y \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} BX+CY = |\mu|X \\ CX-BY = |\mu|.Y \end{array} \right. \end{aligned}$$

par unicité des parties réelles et imaginaires

$$\begin{aligned} D.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = |\mu|.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &\iff (BX+CY)+i(CX-BY) = |\mu|(X+iY) \\ &\iff (B+iC).(X-iY) = |\mu|(X+iY) \end{aligned}$$

$$D.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = |\mu|.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff A.\overline{X+iY} = |\mu|.(X+iY)$$

On en déduit que $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est vecteur propre de D associé à la valeur propre $|\mu|$ si, et seulement si $X + iY$ est vecteur co-propre de A associé à la valeur co-propre $|\mu|$.

> On a donc bien μ est une valeur co-propre de $A = B + iC$ si, et seulement si $|\mu|$ est valeur propre de $D = \begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix}$.

• • • FIN • • •