1 Ensembles dénombrables et familles sommables

1.1 Notions sur les ensembles dénombrables

Definition 1.1

1. Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il est existe une bijection de $\mathbf{N}$ dans E.
   L'ensemble E peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in \mathbf{N}\}$ avec des x_i distincts.

2. Un ensemble E est dit **au plus dénombrable** lorsqu'il est fini ou dénombrable.
   S'il est non vide, E peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$ avec des x_i distincts et $I = \mathbf{N}$ ou $I = [\![1, n]\!]$.
   Ce qui revient aussi à dire que E est vide ou qu'il existe une surjection de $\mathbf{N}$ dans E.

Proposition 1.1

Sont dénombrables les ensembles suivants :
- $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{N}^2$,
- un produit cartésien d'un nombre fini d'ensemble dénombrables.

Proposition 1.2

- Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

- Une union au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

1.2 Notions sur les familles sommables

On admet qu'à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ on sait associer sa somme $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \in [0, +\infty]$, et que pour tout découpage en paquets de I : $I = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}} I_n$,

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} x_i \right)$$

En fait on pose comme définition : $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = Sup \left\{ \sum_{j\in J} x_j, \quad J \text{ partie finie de } I \right\} \in [0, +\infty]$.

Definition 1.2

1. La famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ est dite **sommable** lorsque :

$$\sum_{i\in I} x_i < \infty$$

   En pratique on peut découper, calculer et majorer les sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité

2. Une famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ de complexes est dite **sommable** lorsque la famille $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est.

Remarque 1.1

La sommabilité d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ équivaut à la convergence absolue de la série $\sum u_n$ associée.

Exemple 1.1

- La famille $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est sommable, la famille $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ne l'est pas.
- La famille $\left(\dfrac{1}{(p+q+1)^2}\right)_{(p,q)\in\mathbf{N}^2}$ n'est pas sommable.
- La famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ est sommable.

Proposition 1.3

Soient deux familles au plus dénombrables $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$.

Si $\forall i \in I \quad |x_i| \leqslant y_i$ et si $(y_i)_{i\in I}$ est sommable alors $(x_i)_{i\in I}$ est sommable.

Proposition 1.4 *Admis*

Les sommes de familles sommables se manipulent grâce aux propriétés suivantes :

Soient deux familles sommables $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$.

- **Croissance** : Si $\forall i \in I \quad x_i \leqslant y_i$ alors $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$.

- **Linéarité** : $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $(x_i+\lambda y_i)_{i\in I}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{i\in I}(x_i+\lambda y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \lambda \sum_{i\in I} y_i$.

- **Sommation par paquets** : Pour tout recouvrement disjoints $(I_k)_{k\in K}$ de I la famille $\left(\displaystyle\sum_{i\in I_k} x_i\right)_{k\in K}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} x_i\right)$.

- **Théorème de Fubini** :

Si $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable alors les familles $\left(\displaystyle\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)_{j\in J}$ et $\left(\displaystyle\sum_{j\in J} u_{i,j}\right)_{i\in I}$ le sont et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$$

- **Produit de sommes** :

Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont deux familles sommables alors $(a_ib_j)_{(i,j)\in I\times J}$ l'est et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_ib_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)$$

2 Probabilités, variables aléatoires et lois usuelles

2.1 Univers, événements, variables aléatoires discrètes

Pour certaines expériences, on ne peut prédire avec certitude le *résultat*, on peut seulement décrire l'ensemble des résultats possibles. Ces expériences sont dites *aléatoires*.
L'ensemble de tous les résultats possibles est l'univers, noté Ω.

Definition 2.1 Tribu

- On appelle tribu (*ou σ-algèbre*) sur un univers Ω, toute partie $\mathscr{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui vérifie :

  - $\Omega \in \mathscr{A}$
  - $\forall A \in \mathscr{A},\quad \overline{A} \in \mathscr{A}$ où $\overline{A} = \Omega \backslash A$ (*stabilité par passage au complémentaire*)
  - pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathscr{A}$ (*stabilité par union dénombrable*)

- L'ensemble $(\Omega, \mathscr{A})$ s'appelle un espace probabilisable.
- Les éléments de la tribu $\mathscr{A}$ sont appelés des événements.
- Deux événements A et B sont dits **incompatibles** lorsque $A \cap B = \emptyset$.
- On dit que l'événement A *implique* l'événement B lorsque $A \subset B$.

Proposition 2.1

Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω, alors :

- $\emptyset \in \mathscr{A}$.
- La tribu $\mathscr{A}$ est stable par intersection dénombrable :
  $\forall (A_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbf{N}} \quad \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathscr{A}$.
- $\mathscr{A}$ est stable par réunion et intersection finies :
  Si $A_1, \ldots, A_p$ sont dans $\mathscr{A}$, alors $A_1 \cup \cdots \cup A_p \in \mathscr{A}$ et $A_1 \cap \cdots \cap A_p \in \mathscr{A}$.

Definition 2.2 Variable aléatoire discrète

On appelle variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $X : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow E \\ \omega \mapsto X(\omega) \end{array}$ telle que :

- $X(\Omega) = \{X(\omega), \quad \omega \in \Omega\}$ est au plus dénombrable et
- $\forall x \in X(\Omega), \quad X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) = x\}$ est un événement.

Lorsque $X(\Omega)$ est fini, on dit que X est une variable aléatoire discrète finie.
Lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable on dit que X est variable aléatoire discrète infinie.

Notations :

- Pour $A \in \mathscr{A}$, l'événement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) \in A\}$ se note $(X \in A)$.

- $\forall x \in X(\Omega)$, l'événement $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) = x\}$ se note $(X = x)$ ou $[X = x]$.

- Lorsque X est **à valeurs réelles**, pour tout réel x on note

$$(X \geqslant x) = X^{-1}([x, +\infty[) = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) \geqslant x\}$$

de même pour $(X > x)$, $(X \leqslant x)$, $(X < x)$.

Exemple 2.1

On lance deux fois de suite un dé cubique. On note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros obtenus lors des deux lancers.
Décrire les événements (X est pair), $(X \geqslant 5)$, $(X = 4)$.

Definition 2.3 **Fonction d'une variable aléatoire**

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$, et soit $f : X(\Omega) \subset E \to F$.

On peut définir la composée $f \circ X$: $\begin{array}{l} \Omega \longrightarrow F \\ \omega \mapsto f(X(\omega)) \end{array}$.

$f \circ X$, notée $f(X)$, est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

2.2 Probabilités

Definition 2.4 **Probabilité**

Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur l'univers Ω, on appelle probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$

toute application $P : \mathscr{A} \longrightarrow [0, 1]$ qui vérifie :
- $P(\Omega) = 1$

- P est σ-additive : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'évènements incompatibles deux à deux, la série $\sum P(A_n)$ converge et $$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ s'appelle un espace probabilisé.

- Pour tout événement $A \in \mathscr{A}$, $P(A)$ s'appelle la probabilité de l'événement A.

- On appelle **évènement presque sûr** tout événement de probabilité égale à 1.

• On appelle **événement négligeable** tout événement de probabilité égale à 0.

• On appelle **système complet d'événements** toute suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'événements incompatibles deux à deux telle que $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$.

• On appelle **système quasi-complet d'événements** toute suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'événements incompatibles deux à deux telle que : $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.

Proposition 2.2 Propriétés d'une probabilité

On considère $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

- $P(\varnothing) = 0$,
- si $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille finie d'événements **incompatibles** alors $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$,
- si A est un événement alors $P(\bar{A}) = 1 - p(A)$,
- si A et B sont deux événements tels que $A \subset B$ alors
$$P(A) \leqslant P(B) \quad \text{et} \quad P(B\backslash A) = p(B) - p(A)$$
- si A et B sont deux événements alors $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$,

• **Continuité croissante**

Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_n \subset A_{n+1}$ alors
$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

• **Continuité décroissante**

Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_{n+1} \subset A_n$ alors
$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

• **Sous additivité** :

Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'événements alors $$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

On rappelle que si la série diverge, la somme précédente vaut $+\infty$.

Remarque 2.1 *Application*

Pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

On lance une pièce de monnaie une infinité de fois. Déterminer la probabilité d'obtenir PILE à tous les lancers.

2.3 Probabilités conditionnelles

Dans toute cette partie $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Definition 2.5 Probabilité conditionnelle

Si A et B sont des événements tels que $P(B) \neq 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel :

$$\boxed{P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

L'application $P_B : \begin{array}{l} \mathscr{A} \to [0,1] \\ A \mapsto P_B(A) \end{array}$ définit une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Proposition 2.3 Formule des probabilités composées

Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements tels que $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors

$$\boxed{P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1).P_{A_1}(A_2).P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)}$$

Proposition 2.4 Formule des probabilités totales

Si $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors pour tout évènement B la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et

$$\boxed{P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).P(B|A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).P_{A_n}(B)}$$

en adoptant la convention $P(B|A_n).P(A_n) = 0$ si $P(A_n) = 0$.

Proposition 2.5 Formules de Bayes

1. Pour deux événements A et B de probabilité non nulle, on peut relier les probabilités conditionnelles $P_A(B)$ et $P_B(A)$, ce qui permet en pratique d'inverser *cause et conséquence* :

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(B)P_A(B)}{P(B)} \qquad \textit{Formule de Bayes}}$$

2. Si $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est un système presque-complet d'événements alors pour tout événement B de probabilité non nulle

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad P_B(A_k) = \frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).P_{A_n}(B)} \qquad \textit{Formule de Bayes}$$

2.4 Loi d 'une variable aléatoire discrète

Definition 2.6 Loi d'une variable aléatoire discrète

Si X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$,

$$\text{on appelle loi de } X \text{ l'application } P_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \to & [0,1] \\ U & \mapsto & P(X \in U) \end{array}$$

La loi de X est déterminée par la distribution de probablités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$, c'est pourquoi on appellera plutôt

loi de X la donnée de $X(\Omega)$ et des probabilités $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Remarque 2.2

Si X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ (I au plus dénombrable) alors
- $(\{X = x_i\})_{i \in I}$ est un système complet d'événements.
- P_X est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$.

En particulier : $\displaystyle\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$.

Notation : Lorsque deux variables aléatoires X et Y ont même loi, on note $X \sim Y$.

Remarque 2.3

Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$ pour toute fonction f définie sur $X(\Omega) = Y(\Omega)$.

Definition 2.7 Variable géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$

Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ lorsque

$$X(\Omega) = \mathbf{N}^* \text{ et } \quad \forall k \in \mathbf{N}^* \quad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

On note : $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Interprétation : X s'interprète comme le rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

Proposition 2.6

$$\text{Si } X \sim \mathcal{G}(p) \text{ alors } \forall k \in \mathbf{N} \quad P(X > k) = (1-p)^k$$

Definition 2.8 **Variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$**

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ lorsque

$$X(\Omega) = \mathbf{N} \text{ et } \quad \forall k \in \mathbf{N} \qquad P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Interprétation en termes d'événements rares

Definition 2.9 **Loi conditionnelle de X sachant A**

Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$ et X une variable aléatoire.

On appelle **loi conditionnelle de X sachant** A, la loi de X relativement à la probabilité P_A c'est-à-dire l'application $\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \mapsto & P_A(X = x) = \dfrac{P(A, X = x)}{P(A)}. \end{array}$

Exemple 2.2

On lance une infinité de fois une pièce non équilibrée qui amène Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On note X la variable aléatoire égale au rang du second Pile et A l'événement : le premier Pile est obtenu au quatrième lancer. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant A.

Definition 2.10 **Couple de variables aléatoires**

Si $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ sont deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, alors on dispose du vecteur aléatoire $Z = (X, Y) : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & E \times F \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$ qui vérifie :

- $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$, donc $Z(\Omega)$ est fini ou dénombrable,
- $\forall (x, y) \in Z(\Omega),\ Z^{-1}(\{(x, y)\}) = X^{-1}(\{x\}) \cap Y^{-1}(\{y\}) \in \mathscr{A}$

Tout couple de variables aléatoires discrètes est une variable aléatoire discrète.

Notation L'événement $(Z = (x, y)) = (X = x) \cap (Y = y)$ sera en général noté $(X = x, Y = y)$.

Definition 2.11 **Loi conjointe - Lois marginales**

On appelle **loi conjointe** de X et de Y, la loi de $Z = (X, Y)$.

Elle est donnée par la famille $(P(X = x, Y = y))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$.

On appelle **lois marginales** du couple (X, Y), les lois de X et de Y, données par la formule des probabilités totales :

- $\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)$
- $\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y).$

Definition 2.12 Vecteur aléatoire

Si $X_1 : \Omega \to E_1, \ldots, X_n : \Omega \to E_n$ sont des variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, alors on dispose du vecteur aléatoire $Z = (X_1, \ldots, X_n) : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & E_1 \times \ldots \times E_n \\ \omega & \mapsto & (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \end{array}$ qui vérifie :

- $Z(\Omega) \subset X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, donc $Z(\Omega)$ est fini ou dénombrable,
- $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in Z(\Omega)$, $Z^{-1}(\{(x_1, \ldots, x_n)\}) = X_1^{-1}(\{x_1\}) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(\{x_n\}) \in \mathscr{A}$

Tout n-uplet de variables aléatoires discrètes est une variable aléatoire discrète.

Notation L'événement $(Z = (x_1, \ldots, x_n)) = (X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)$ sera en général noté $(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$.

2.5 Indépendance

Definition 2.13

1. Deux événements A et B sont dits **indépendants** lorsque $\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B).}$
2. Des événements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits **indépendants deux à deux** lorsque
$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i).P(A_j).}$$
3. Des événements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits **indépendants** (*ou mutuellement indépendants*) lorsque
$$\boxed{\text{pour toute partie } I \text{ de } [\![1, n]\!],\ P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).}$$

Remarque 2.4 Indépendance et indépendance deux à deux

L'indépendance de n évènements entraine leur indépendance deux à deux.
La réciproque est fausse.

Proposition 2.7 Indépendance et complémentaires

- Si A et B sont deux événements incompatibles alors A et $\overline{B}$ le sont aussi.

- Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des évènements indépendants alors les événements $B_1, \ldots, B_n$, avec $B_i \in \left\{A_i, \overline{A_i}\right\}$, sont indépendants.

Definition 2.14 Variables aléatoires indépendantes

Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont dites **indépendantes** lorsque

$$\boxed{\forall A \subset X(\Omega), \quad \forall B \subset Y(\Omega), \quad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A).P(Y \in B)}$$

Cela revient à dire que la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x).P(Y = y)$$

On note alors $X \perp Y$.

Definition 2.15 Suite i.i.d.

- On appelle suite de variables aléatoires indépendantes, toute suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $\forall n \in \mathbf{N} \quad X_0, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes.

- On apelle suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, notée suite i.i.d., toute suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de variables aléatoires indépendantes telle que $\forall i \neq j \quad X_i \sim X_j$.

Proposition 2.8 Fonctions de variables indépendantes

- Si $X \perp Y$ alors $f(X) \perp g(Y)$, avec f et g des fonctions respectivement définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

- **Lemme des coalitions**
  si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes alors pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $f(X_1, \ldots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \ldots, X_n)$ le sont aussi.

  On peut étendre au cas de plus de deux coalitions.

3 Espérance et variance

Dans ce paragraphe, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

3.1 Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe

Definition 3.1 **Espérance d'une v.a. à valeurs dans $[0, +\infty]$**

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$, on définit son espérance par :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

avec la convention $xP(X = x) = 0$ si $x = +\infty$ et $P(X = x) = 0$.

Exemple 3.1

Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Definition 3.2 **Variable aléatoire d'espérance finie**

Si X est une variable aléatoire à **valeurs réelles ou complexes**, on dit que X est **d'espérance finie** lorsque la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X : $\boxed{E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).}$

On appelle **variable centrée**, toute variable aléatoire dont l'espérance est nulle.

Remarque 3.1

Lorsque X est d'espérance finie avec $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbf{N}\}$, on peut écrire

$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n) = \dfrac{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)}$, donc $E(X)$ est la moyenne pondérée des valeurs prises par X, chaque valeur étant pondérée par la probabilité que X prenne cette valeur.

Proposition 3.1 **Cas d'une v.a. à valeurs dans $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$**

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ alors

$$\boxed{E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)}$$

Exemple 3.2

Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Proposition 3.2 **Formule de transfert**

Si X est une variable aléatoire discrète (non forcément réelle) et si f est une application définie sur $X(\Omega)$ à valeurs réelles ou complexes alors

la variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie **ssi** la famille $(f(x)P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ;

et dans ce cas :

$$\boxed{E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x)}$$

Ce qui permet de calculer l'espérance de $f(X)$ sans connaître la loi de $f(X)$.

Proposition 3.3 **Linéarité**

Si a et b sont des scalaires et si X et Y sont d'espérance finie alors $X+Y$, aX, $aX+bY$ sont d'espérance finie et

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(aX) = aE(X) \qquad E(aX+b) = aE(X) + b$$

$$E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Proposition 3.4

Si $|X| \leqslant Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie et $E(|X|) \leqslant E(Y)$.

Proposition 3.5 **Positivité et croissance de l'espérance**

1. Si X est à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ alors $E(X) \geqslant 0$. (*Positivité de l'espérance*)
2. Si X est positive et d'espérance nulle alors $P(X=0)=1$.
3. Soient X et Y d'espérance finie,

   Si $X \leqslant Y$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$ (*Croissance de l'espérance*)

4. Si X et Y sont **indépendantes** d'espérance finie alors XY est d'espérance finie et

$$\boxed{E(XY) = E(X).E(Y)}$$

On peut étendre le résultat au cas de n variables aléatoires indépendantes.

3.2 Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart-type et covariance

Dans ce paragraphe, toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et sont à valeurs réelles.

Proposition 3.6

Si X^2 est d'espérance finie alors X est d'espérance finie, ainsi que $(X - E(X))^2$.

Proposition 3.7 **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi et

$$\boxed{E(XY)^2 \leqslant E(X^2).E(Y^2)}$$

Avec égalité si, et seulement si, X et Y sont presque sûrement colinéaires.

Definition 3.3 **Variance - Ecart-type**

Si X^2 est d'espérance finie alors on appelle

variance de X le réel $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$,

écart-type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

De plus :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

et

$$\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2, \quad V(aX + b) = a^2 V(X) \qquad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$

Exemple 3.3 **Variance d'une variable géométrique, de Poisson**

- Déterminer la variance d'une variable aléatoire géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
- Déterminer la variance d'une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Tableau récapitulatif des lois usuelles

Loi	Probabilités	Espérance	Variance
$X \sim \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$	$\forall k \in [\![1,n]\!]$ $P(X=k)=\dfrac{1}{n}$	$E(X)=\dfrac{n+1}{2}$	$V(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$
$X \sim \mathcal{B}(p)$	$P(X=1)=p$	$E(X)=p$	$V(X)=p(1-p)$
$X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$\forall k \in [\![0,n]\!]$ $P(X=k)=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$E(X)=np$	$V(X)=np(1-p)$
$X \sim \mathcal{G}(p)$	$\forall k \in \mathbf{N}^*$ $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$	$E(X)=\dfrac{1}{p}$	$V(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$
$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$\forall k \in \mathbf{N}$ $P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	$E(X)=\lambda$	$V(X)=\lambda$

Remarque 3.2 Variable aléatoire centrée réduite

On dit que X est une variable aléatoire centrée réduite lorsque $E(X)=0$ et $\sigma(X)=1$.

Si X^2 est d'espérance finie avec $\sigma(X)>0$, alors $Y=\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Definition 3.4 Covariance

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes telles que X^2 et Y^2 soient d'espérance finie, on appelle **covariance** de X et Y le réel défini par

$$\boxed{Cov(X,Y)=E\left((X-E(X))(Y-E(Y))\right)=E(XY)-E(X)E(Y)}$$

Remarque 3.3 Covariance de deux variables indépendantes

Si X et Y sont indépendantes alors $cov(X,Y)=0$.

Proposition 3.8 Variance d'une somme finie

Si X et Y admettent une variance alors $Z=X+Y$ admet une variance et

$$\boxed{V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)}$$

Ce résultat s'étend à la somme de n variables aléatoires discrètes $X_1,\dots,X_n$:

$$\boxed{V(X_1+X_2+\ldots+X_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Cov(X_i,X_j)=\sum_{k=1}^{n}V(X_k)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}Cov(X_i,X_j)}$$

Cas particulier Si $X_1, \ldots, X_n$ sont **indépendantes deux à deux** alors

$$\boxed{V(X_1 + \ldots + X_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n).}$$

3.3 Inégalités probabilistes

Proposition 3.9 Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire réelle discrète positive alors

$$\boxed{\forall a > 0, \quad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}}$$

Proposition 3.10 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X est une variable aléatoire réelle discrète telle que X^2 soit d'espérance finie alors

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}}$$

Proposition 3.11 Loi faible des grands nombres

Si $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie alors,

$$\text{en notant } S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ et } m = E(X_1)$$

on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n} S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$