Exercice 1

On considère un ensemble à n éléments et une partie fixée A de E de cardinal k.
• Quel est le nombre de parties de E ne rencontrant pas A ?
• Quel est le nombre de parties de E contenant A ?

Exercice 2

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. Soit k fixé dans $[\![1, n]\!]$.

1. On tire k jetons successivement 1 à 1 et sans remise, on note $(x_1, \ldots, x_k)$ la liste des numéros obtenus. Combien y a-t-il de résultats tels que $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$?
2. On effectue maintenant les k tirages en remettant le jeton tiré à chaque fois. Combien y a-t-il de résultats vérifiant $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_k$?
   On pourra introduire les nombres $y_i = x_i + i - 1$ pour $i \in [\![1, k]\!]$.

Exercice 3

1. On suppose que $[0, 1[$ est dénombrable. On peut alors écrire $[0, 1[= \{x_n, \quad n \in \mathbf{N}^*\}$, les x_n étant distincts deux à deux.
   On explicite les écritures décimales des nombres x_n :
   $x_1 = 0, a_{11}a_{21} \cdots a_{n1} \cdots$
   $x_2 = 0, a_{12}a_{22} \cdots a_{n2} \cdots$
   $x_3 = 0, a_{13}a_{23} \cdots a_{n3} \cdots$
   $\vdots$
   $x_n = 0, a_{1n}a_{2n} \cdots a_{nn} \cdots$
   $\vdots$
   Pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, on choisit un nombre $a_i \in \{0, 1, \ldots, 8\} - \{a_{ii}\}$ et on considère le nombre réel $x = 0, a_1a_2 \cdots a_n \cdots$
   En utilisant ce nombre x, justifier que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable.
2. Que peut-on en déduire pour $\mathbf{R}$?

Exercice 4

Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(\dfrac{1}{(p + q^2)(p + 1 + q^2)}\right)_{(p,q)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}^*}$ est sommable.

Exercice 5

Soit $I = \{(n, k) \in \mathbf{N}^2, \quad k > n\}$. Déterminer les réels α tels que la famille $\left(\dfrac{1}{k^\alpha}\right)_{(n,k)\in I}$ soit sommable et, dans ce cas, exprimer sa somme à l'aide de la fonction ζ de Riremann.

Exercice 6

On considère la famille $\mathcal{F} = \left(\dfrac{1}{n^2 - p^2}\right)_{(n,p)\in I}$ avec $I = \{(n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*, \quad n \neq p\}$.

1. Pour $p \in \mathbf{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}^*, n\neq p} \frac{1}{n^2 - p^2}$.

2. En déduire que la famille $\mathcal{F}$ n'est pas sommable.

Exercice 7

Soit $\Omega = \{a, b, c\}$.

1. Déterminer la plus petite tribu contenant $\{a\}$.
2. Déterminer la plus petite tribu contenant $\{a\}$ et $\{b\}$.

Exercice 8 *Masse de Dirac*

Soit Ω un ensemble non vide et $a \in \Omega$ fixé.
On définit l'application $\mathbf{P}$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par : $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbf{P}(A) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \text{ si } a \notin A \end{array} \right.$
Montrer que $\mathbf{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Exercice 9

A quelle(s) condition(s) sur les réels x et y existe-t-il une probabilité sur $\Omega = \{a, b, c\}$ vérifiant $\mathbf{P}(\{a, b\}) = x$ et $\mathbf{P}(\{b, c\}) = y$?

Exercice 10

1. Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire. Montrer que :
$\mathbf{P}(A \cup B) + \mathbf{P}(A \cup \bar{B}) + \mathbf{P}(\bar{A} \cup B) + \mathbf{P}(\bar{A} \cup \bar{B}) = 3 = 2^2 - 1$.
2. *Généralisation :* Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements d'une expérience aléatoire. On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des n-uplets $(B_1, \ldots, B_n)$ où pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$ on a $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$.
Montrer que : $\displaystyle\sum_{(B_1,\ldots,B_n)\in\mathcal{T}_n} \mathbf{P}(B_1 \cup \cdots \cup B_n) = 2^n - 1$.

Exercice 11

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, 20]\!]$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \lfloor \sqrt{X} \rfloor$.

Exercice 12

Soit A et B deux événements tels que B ne soit ni presque sûr ni presque impossible.
Montrer que A et B sont indépendants si, et seulement si $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}_{\bar{B}}(A)$.

Exercice 13

Soit A, B et C trois événements tels que $\mathbf{P}(A) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbf{P}(B) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbf{P}(C) = \dfrac{1}{9}$. Calculer $\mathbf{P}(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$ lorsque :

- A, B, C sont deux à deux incompatibles.
- A, B, C sont mutuellement indépendants.

Exercice 14

Trois joueurs A, B, C jouent au ballon :

— Le joueur A passe le ballon à B avec la probabilité de $\dfrac{1}{3}$ et à C avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$

— Le joueur B passe le ballon à A avec une probabilité de $\dfrac{1}{3}$ et à C avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$

— Le joueur C passe le ballon à A avec une probabilité de $\dfrac{1}{3}$ et à B avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$

Considérons les événements suivants :

$$\begin{cases} A_n : & \text{le joueur A a le ballon après le } n^{\text{ième}} \text{ lancer.} \\ B_n : & \text{le joueur B a le ballon après le } n^{\text{ième}} \text{ lancer.} \\ C_n : & \text{le joueur C a le ballon après le } n^{\text{ième}} \text{ lancer.} \end{cases}$$

Au départ le joueur A a le ballon.

1. Déterminer une matrice M telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$X_{n+1} = M.X_n \quad \text{avec } X_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(A_n) \\ \mathbf{P}(B_n) \\ \mathbf{P}(C_n) \end{pmatrix}$$

2. Justifier que $\forall n \in \mathbf{N} \quad X_n = M^n.X_0$.
3. En déduire la limite des suites $(\mathbf{P}(A_n))_{n\in\mathbf{N}}$, $(\mathbf{P}(B_n))_{n\in\mathbf{N}}$, $(\mathbf{P}(C_n))_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice 15

Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements presque sûrs dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Montrer que les événements $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ et $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$ sont presque sûrs.

Exercice 16

Soient p_1 et p_2 dans $]0, 1]$. Deux archers tirent chacun leur tour sur une cible. Le premier qui touche a gagné. Le joueur qui commence a la probabilité p_1 de toucher à chaque tour et le second la probabilité p_2.

1. Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?
2. Montrer que le jeu se termine presque sûrement.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de p_1 existe-t-il une valeur de p_2 pour laquelle le jeu est équitable ?

Exercice 17

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ telles que $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(a)$ avec $(a, p) \in]0, 1[^2$. Déterminer la loi de $Z = 2X+Y$.

Exercice 18

Soit, $\lambda > 0$, $p \in]0, 1[$, X et Z deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et la loi conditionnelle de Z sachant $(X = n)$ soit une loi $\mathcal{B}(n, p)$. Déterminer la loi de Z.

Exercice 19

L'instant au bout duquel un dispositif cesse de fonctionner est modélisé par une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}^*$. Le taux de défaillance de X est la suite de terme général $x_n = \mathbf{P}_{(X \geqslant n)}(X = n)$. Un taux de défaillance croissant (resp. décroissant) modélise un phénomène d'usure (resp. de rodage).

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, justifier que $x_n \in [0, 1[$ puis calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - x_k)$.
2. Montrer que la série $\sum x_n$ diverge.
3. Montrer que le taux de défaillance est constant si, et seulement si, X suit une loi géométrique (*absence de mémoire*).
4. Montrer que si la loi de X est caractérisée par $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$ alors le taux de défaillance tend vers 0.
5. Montrer que si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors $\dfrac{1}{x_n} = e^{\lambda} \displaystyle\int_0^1 n v^{n-1} e^{-\lambda v} \mathrm{d}v$. En déduire que le taux de défaillance tend vers 1.

Exercice 20

Soit X et Y deux variables à valeurs dans $\mathbf{N}$ telles que,

$$\forall (i, j) \in \mathbf{N}^2 \qquad \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{e 2^{i+1} j!}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y. X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 21

1. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, quelle est la loi suivie par $Y = n - X$?
2. Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(q)$, avec X et Y indépendantes, quelle est la loi suivie par $Z = max(X, Y)$?
3. Deux archers tirent indépendemment sur n cibles. Á chaque tir, le premier archer a la probabilité p de toucher, le second la probabilité q.
   (a) Quelle est la loi suivie par le nombre de cibles ayant été touchées au moins une fois ?
   (b) Quelle est la loi suvie par le nombre de cibles épargnées ?

Exercice 22

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1, 2\}$ et Y une variable aléatoire indépendante de X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. Calculer la probabilité que Z soit impaire, resp. paire.

Exercice 23

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. Quelle est la probabilité que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & X-1 & 0 \\ 0 & X & Y \\ 0 & 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Exercice 24

On considère 3 individus notésA_1, A_2 et A_3 à la poste. A_1 et A_2 occupent les deux seuls guichets. A_3 est donc en train d'attendre son tour.
On considère que le temps peut être représenté par des entiers. On note respectivement X_1, X_2 et X_3 les temps mis respectivement par A_1, A_2 et A_3 à un guichet.
X_1, X_2 et X_3 suivent la même loi géométrique de paramètre p.
On note Y le temps d'attente de l'individu A_3 avant d'accéder à un guichet libre.
On note Z le temps que met A_3 à la poste.

1. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, calculer $\mathbf{P}(Y > k))$. En déduire la loi de Y.
2. Exprimer Z en fonction de Y et de X_3 et déterminer sa loi.
3. Quel est le temps moyen mis par A_3 à la poste ?

Exercice 25

Soit $p \in]0, 1[$ et (X_n) une suite *i.i.d.* telle que $X_1 \sim \mathcal{G}(p)$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $Y_n = min(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Déterminer la loi de Y_n puis son espérance.
2. Déterminer la loi de Z_n puis un équivalent de $\mathbf{E}(Z_n)$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 26

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ telle que $\forall k \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}(X = k) = kp^2(1-p)^{k-1}$, avec $p \in]0, 1[$.

1. Vérifier que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité.
2. Calculer les valeurs de $\mathbf{E}(X-1)$ et $\mathbf{E}((X-1)(X-2))$.
3. En déduire les valeurs de l'espérance et la variance de X.

Exercice 27

On dispose d'une urne qui contient 3 jetons numérotés 1,2,3 et dans laquelle on effectue des tirages avec remise. Soient Y la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un chiffre différent du premier chiffre obtenu et Z la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un troisième chiffre.

1. Déterminez la loi de Y.
2. Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Déterminer la loi de (Y, Z).
4. En déduire la loi de Z.

Exercice 28

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $\mathbf{P}(X \geqslant \lambda + 1) \leqslant \lambda$.

Exercice 29

Le nombre de pièces sortant d'une usine en une journée est une variable aléatoire d'espérance 50. On veut estimer la probabilité que la production de demain dépasse 75 pièces.

1. En utilisant l'inégalité de Markov, quelle estimation obtient-on sur cette probabilité ?
2. Que peut-on dire de plus sur cette probabilité si on sait que l'écart-type de la production quotidienne est égal à 5 ?

Exercice 30

On utilise un dé cubique équilibré. Déterminer le nombre de lancers nécessaires pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du « 6 » au cours de ces lancers différera de $\dfrac{1}{6}$ d'au plus $\dfrac{1}{100}$.