PSI - Samedi 11 janvier 2025 - Sujet B CCINP - 4 heures
Calculatrices autorisées

Problème 01 : Des résultats sur les matrices symétriques réelles

Notations.

Dans tout le problème, $n \in \mathbb{N}^*$. On note $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $1 \leq k \leq n$. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes, $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices colonnes à n lignes. $O(n)$ désigne le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que toute matrice de $S_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice diagonale avec une matrice de passage orthogonale.

On rappelle que $S_n^+ = \left\{A \in S_n(\mathbb{R}), \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X^T.A.X \geqslant 0\right\}$ et
$S_n^{++} = \left\{A \in S_n(\mathbb{R}), \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X \neq 0 \Longrightarrow X^T.A.X > 0\right\}$.

On note $\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans cet ordre. L'écriture $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A. On note A^T la matrice transposée de A et $\mathrm{tr}(A)$ la trace de la matrice carrée A.

Dans tout le problème, on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Le produit scalaire de deux vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ est noté $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|x\|$ désigne la norme du vecteur x. Soient X et Y les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des composantes de x et y dans $\mathcal{B}$, le produit X^TY appartient à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et son unique coefficient est $(x|y)$. On écrira $(x|y) = X^TY$ qui est le produit scalaire canonique des matrices X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

I- Racine carrée d'une matrice de S_n^+.

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres réelles de S comptées autant de fois que leur ordre de multiplicité. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de S avec $\forall i \in [\![1, n]\!],\ SX_i = \lambda_i X_i$.

I.1. *On va montrer que $S \in S_n^+$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \geq 0$.*

I.1.1. On suppose que $S \in S_n^+$. Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \geqslant 0$.

I.1.2. On suppose que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \geqslant 0$. Montrer que $S \in S_n^+$.

On montre de même, et on admettra, qu'une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ appartient à S_n^{++} si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

I.1.3. On suppose que $S \in S_n^{++}$ et donc que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i > 0$. Montrer que S est inversible et que $S^{-1} \in S_n^{++}$.

I.2. On suppose que $S \in S_n^+$.

I.2.1. Soient $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Calculer Δ^2.

On suppose que $N \in S_n^+$ vérifie $N^2 = D$. On note $(C_1, \dots, C_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soient $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i C_i$ et $\mu \in \mathbb{R}^+$ tels que $NY = \mu Y$.
Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mu^2 y_i = \lambda_i y_i$ puis $\mu y_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$. En déduire $N = \Delta$.

I.2.2. Soit $U \in O(n)$ telle que $S = UDU^T$. Déterminer une matrice $T \in S_n^+$ telle que $T^2 = S$. Montrer que T est unique.

On notera $T = \sqrt{S}$ l'unique matrice $T \in S_n^+$ telle que $T^2 = S$.

I.3. *Une détermination de* $\sqrt{S}$. On suppose que $S \in S_n^+$ et que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de S. On note $0 \leqslant \mu_1 < \cdots < \mu_p$ les valeurs propres **distinctes** de S. Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on définit les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $\mu_1, \dots, \mu_p$ par :

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ \forall a \in \mathbb{R},\ L_k(a) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{a - \mu_j}{\mu_k - \mu_j}$$

I.3.1. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, calculer $L_k(S)X_i$ en distinguant les cas $\mu_k = \lambda_i$ et $\mu_k \neq \lambda_i$ (on rappelle que les X_i définis au début de la partie **I** appartiennent à une base orthonormée de vecteurs propres de S avec $\forall i \in [\![1, n]\!],\ SX_i = \lambda_i X_i$).

I.3.2. Soit P le polynôme de degré $\leqslant p-1$, à coefficients réels tel que $\forall k \in [\![1, p]\!],\ P(\mu_k) = \sqrt{\mu_k}$. Exprimer P comme une combinaison linéaire des polynômes L_k. Calculer $P(S)X_i$ et en déduire que $P(S) \in S_n^+$. Montrer que $P(S) = \sqrt{S}$.

I.3.3. En appliquant les questions précédentes, on prend $S = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que $S \in S_3^+$. Exprimer $\sqrt{S}$ comme une combinaison des matrices S et $I_3 = \mathrm{diag}(1, 1, 1)$.

II - Des inégalités remarquables.

Soit $S \in S_n^{++}$ et soit $T \in S_n^{++}$ telles que $T^2 = S$. On note s et t les automorphismes de $\mathbb{R}^n$ de matrices S et T relativement à la base orthonormée $\mathcal{B}$. Soient s^{-1} et t^{-1} les applications réciproques de s et t. On note $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les n valeurs propres de s.

II.1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer l'inégalité

$$(t(x)|t^{-1}(x))^2 \leqslant (s(x)|x)(s^{-1}(x)|x) \tag{1}$$

A quelle condition sur x a-t-on égalité ?

II.2. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall a \in \mathbb{R},\ P(a) = a^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)a + \lambda_1 \lambda_n$$

Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer le signe de $P(\lambda_i)$.

Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $v = -P(s)\circ s^{-1}$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, tel que $s(x) = \lambda_i x$. Calculer $v(x)$ et montrer que x est vecteur propre de v. En déduire que la matrice V de v relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie $V \in S_n^+$.

II.3. Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. On considère le polynôme Q défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ Q(a) = (s(x)|x)\, a^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)\|x\|^2 a + \left(s^{-1}(x)|x\right) \lambda_1 \lambda_n$$

Déterminer le signe de $Q(0)$ et celui de $Q(1)$. En déduire l'inégalité

$$(s(x)|x)\left(s^{-1}(x)|x\right) \leqslant \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|x\|^4 \tag{2}$$

II.4. On suppose que $\lambda_1 < \lambda_n$. Soient v_1 et v_n des vecteurs de norme 1 tels que $s(v_1) = \lambda_1 v_1$ et $s(v_n) = \lambda_n v_n$. Soit $x = v_1 + v_n$. Calculer les produits scalaires $(s(x)|x)$ et $\left(s^{-1}(x)|x\right)$. Montrer que le vecteur x vérifie l'égalité dans l'inégalité (2).

Problème 02 : Un produit scalaire et méthode de quadrature de Gauss

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

1. Justifier que l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.
2. Montrer que l'application $(.|.) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}dt.$$

4. Conclure que $\left(X^k|1\right) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Ecrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
7. En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k | k \in [\![0, n]\!]\}$.

II.Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

8. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}\,(\alpha + kId_{\mathbb{R}_n[X]})$?
9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
10. Justifier que P_k est de degré k.
11. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

12. Montrer que $(\alpha(P)|Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$.
13. En déduire que α est un endomorphisme autoadjoint.
14. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser les questions 9 et 13.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note $x_1, \ldots, x_n$. On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

15. Montrer qu'un n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

16. En déduire qu'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$.
17. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

Fin de l'énoncé