

# PSI - Samedi 11 janvier 2025 - Sujet A Centrale - 4 heures

## Calculatrices autorisées

### Notations.

On note  $\mathbb{R}$  le corps des nombres réels. Si  $n$  est un entier positif, on munit l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  du produit scalaire canonique, noté  $\langle X, Y \rangle$  pour  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ . On note  $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$  la norme associée.

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'algèbre des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels. On assimile  $\mathbb{R}^n$  à l'espace des vecteurs colonnes d'ordre  $n$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à son algèbre d'endomorphismes.

Ainsi,  $\langle X, Y \rangle = X^T \cdot Y$ . On note  $I_n$  la matrice unité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Si  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $\text{Tr}(A)$  la somme de ses éléments diagonaux :  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ .

On rappelle que  $\text{Tr}(A)$  est égale à la somme des valeurs propres complexes de  $A$  comptées avec leurs ordres de multiplicité.

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , le polynôme caractéristique de  $A$  est  $P_A(X) = \det(XI_n - A)$ .

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on définit  $R(A) = \{X^T A X / X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1\}$  qui est une partie de  $\mathbb{R}$ .

Les parties ainsi que les questions ne sont pas indépendantes.

### I - Généralités.

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**I.A.** Démontrer que les valeurs propres réelles de  $A$  sont dans  $R(A)$ .

**I.B.**

**I.B.1)** Démontrer que les éléments  $a_{i,i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) de la diagonale de  $A$  sont dans  $R(A)$ .

**I.B.2)** En considérant la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , montrer que les éléments  $a_{i,j}$  avec  $i \neq j$  ne sont pas nécessairement dans  $R(A)$ .

**I.C.** On considère deux nombres réels  $a \in R(A)$  et  $b \in R(A)$ , avec  $a < b$ . Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux vecteurs de norme 1 tels que  $X_1^T A X_1 = a$  et  $X_2^T A X_2 = b$ .

**I.C.1)** Démontrer que  $X_1$  et  $X_2$  sont linéairement indépendants.

**I.C.2)** On pose  $X_\lambda = \lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2$  pour  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Démontrer que la fonction

$\phi : \lambda \mapsto \frac{X_\lambda^T A X_\lambda}{\|X_\lambda\|^2}$  est définie et continue sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

**I.C.3)** En déduire que le segment  $[a, b]$  est inclus dans  $R(A)$ .

**I.D.** Démontrer que si  $\text{Tr}(A) = 0$  alors  $0 \in R(A)$ .

**I.E.** Soit  $Q$  une matrice orthogonale réelle. Démontrer que  $R(A) = R(Q^T A Q)$ .

**I.F.** On considère les conditions suivantes :

(C<sub>1</sub>)  $\text{Tr}(A) \in R(A)$

(C<sub>2</sub>) il existe une matrice orthogonale réelle  $Q$  telle que la diagonale de la matrice  $Q^T A Q$  soit de la forme  $(\text{Tr}(A), 0, \dots, 0)$ .

**I.F.1)** Démontrer que la condition  $(C_2)$  entraîne la condition  $(C_1)$ .

**I.F.2)** On suppose que  $x \in R(A)$ . Démontrer qu'il existe une matrice  $Q_1$  orthogonale telle que

$Q_1^T A Q_1 = \begin{pmatrix} x & L \\ C & B \end{pmatrix}$  où  $B$  est une matrice de format  $(n-1, n-1)$  ( $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ ),  $C$  un vecteur colonne à  $n-1$  éléments ( $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ ) et  $L$  un vecteur ligne à  $n-1$  éléments ( $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ ).

**I.F.3)** Démontrer que si la matrice  $A$  est symétrique, il en est de même pour la matrice  $B$  ci-dessus.

**I.F.4)** Démontrer que  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(Q_1^T A Q_1)$ .

**I.F.5)** En déduire que si  $A$  est symétrique, la condition  $(C_1)$  implique la condition  $(C_2)$ . On pourra raisonner par récurrence sur  $n$ .

## II - Matrices symétriques de format $(2, 2)$ .

Dans toute cette partie  $A$  et  $B$  désignent des matrices symétriques réelles de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On note  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  (resp.  $\mu_1 \leq \mu_2$ ) les valeurs propres de  $A$  (resp.  $B$ ).

De plus, on rappelle qu'une matrice symétrique  $S$  est positive, ce que l'on notera  $S \geq 0$ , si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

**II.A.** Démontrer que  $R(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$ .

**II.B.** On considère l'ensemble  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  défini par l'équation  $\langle AX, X \rangle = 1$ .

**II.B.1)** Caractériser les conditions sur les  $\lambda_i$  pour lesquelles cet ensemble est

- a) vide;
- b) la réunion de deux droites.

**II.B.2)** Représenter sur une même figure les ensembles  $\Gamma$  obtenus pour  $A$  diagonale avec  $\lambda_1 \in \{0, 1\}$  et  $\lambda_2 = 1$ .

**II.C.** Démontrer que  $\text{Tr}(AB) \leq \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2$ .

On pourra utiliser une matrice orthogonale  $P$  telle que  $P^T B P$  soit une matrice diagonale, pour obtenir  $P^T A P = A' = (a'_{i,j})$  avec  $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = a'_{1,1} + a'_{2,2}$ .

**II.D.** On pose  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$  et on suppose  $A \geq 0$ .

**II.D.1)** Démontrer que  $\det(A) \geq 0$ .

**II.D.2)** Démontrer que  $X^T A X \geq 0$  pour tout vecteur  $X$ .

**II.D.3)** Démontrer que  $a \geq 0$  et  $d \geq 0$ .

**II.D.4)** Soit  $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  symétrique. Démontrer que

$$S \geq 0 \text{ si et seulement si } (\text{Tr}(S) \geq 0 \text{ et } \det(S) \geq 0)$$

**II.E.** On pose  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}$ .

On suppose dans cette section que  $A \geq 0$  et  $B \geq 0$ .

**II.E.1)** En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs  $(b_1, \sqrt{\det(A)})$  et  $(b_2, \sqrt{\det(B)})$ , démontrer que

$$b_1 b_2 \leq \sqrt{a_1 a_2 d_1 d_2} - \sqrt{\det(A) \det(B)}$$

**II.E.2)** En calculant  $\det(A+B) - \det(A) - \det(B)$ , en déduire que

$$\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B) + 2\sqrt{\det(A) \det(B)}$$

**II.F.** On suppose dans cette sous-partie que  $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$ ,  $\det(A) \det(B) \neq 0$  et  $b_1 b_2 \neq 0$ .

**II.F.1)** Démontrer que l'on a l'égalité dans la formule de la question II.E.2 si et seulement si les vecteurs  $(a_1, d_1)$  et  $(a_2, d_2)$  sont liés, ainsi que les vecteurs  $(b_1, \sqrt{\det(A)})$  et  $(b_2, \sqrt{\det(B)})$ .

**II.F.2)** Démontrer alors que l'on a l'égalité dans la formule de la question II.E.2 si et seulement si les matrices  $A$  et  $B$  sont proportionnelles ( $A = \lambda B$  pour un  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ ).

**II.G.** On considère la relation suivante sur l'ensemble des matrices symétriques réelles de format  $(2, 2)$  : on dit que  $S \leq S'$  si et seulement si la matrice symétrique  $S' - S$  vérifie  $S' - S \geq 0$ . Démontrer que la relation  $\leq$  ci-dessus vérifie :

(1)  $S \leq S$ .

(2) Si  $S \leq S'$  et  $S' \leq S$  alors  $S = S'$ .

(3) Si  $S \leq S'$  et  $S' \leq S''$  alors  $S \leq S''$ .

On dit alors que  $\leq$  est une relation d'ordre sur l'ensemble des matrices symétriques réelles de format  $(2, 2)$ .

**II.H.** On considère une suite  $(A_n)_{n \geq 0}$  avec  $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$  de matrices symétrique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

On suppose que la suite  $(A_n)_{n \geq 0}$  est croissante et majorée pour la relation d'ordre définie à la question précédente.

**II.H.1)** Démontrer que pour tout vecteur  $X$  ; la suite  $(X^T A_n X)_{n \geq 0}$  est croissante et majorée.

**II.H.2)** Démontrer que les suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(d_n)_{n \geq 0}$  sont croissantes et majorées.

**II.H.3)** En considérant le vecteur  $X = (1, 1)$ , démontrer que les suites  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $(b_n)_{n \geq 0}$  et  $(d_n)_{n \geq 0}$  sont convergentes dans  $\mathbb{R}$ .

On dit alors que la suite de matrices  $(A_n)_{n \geq 0}$  est convergente dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

### III - Matrices symétriques définies positives.

Dans cette partie toutes les matrices sont de format  $(n, n)$  où  $n$  est un entier  $\geq 2$ . On rappelle que l'on dit qu'une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

**III.A.** Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive. Démontrer qu'il existe une matrice inversible  $M$  telle que  $A = M^T M$ .

**III.B.** Soient  $A$  une matrice symétrique définie positive et  $B$  une matrice symétrique. Démontrer qu'il existe une matrice inversible  $T$  telle que

$$T^T A T = I_n \quad \text{et} \quad T^T B T = D$$

où  $D$  est une matrice diagonale et  $I_n$  est la matrice identité.

**III.C.** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques définies positives.

**III.C.1)** Démontrer que  $\det(I_n + B) \geq 1 + \det(B)$ .

**III.C.2)** En déduire que  $\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$ .

**III.D.** Soient  $x$  un nombre réel strictement positif,  $\beta$  un nombre réel tel que  $0 < \beta < 1$ .

Démontrer que  $x^\beta \leq \beta x + 1 - \beta$ .

**III.E.** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques définies positives,  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels strictement positifs tels que  $\alpha + \beta = 1$ ; démontrer que

$$\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det(A))^\alpha (\det(B))^\beta$$

**III.F.** Pour  $1 \leq i \leq k$ , soient  $A_i$  des matrices symétriques définies positives et  $\alpha_i$  des nombres strictement positifs tels que  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$ . Démontrer que

$$\det(\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_k A_k) \geq (\det(A_1))^{\alpha_1} \dots (\det(A_k))^{\alpha_k}$$

*On pourra raisonner par récurrence sur  $k$ .*

**Fin de l'énoncé**